

Théorème (point fixe de Picard): Soit (E, d) un espace complet et $f: E \rightarrow E$ k -contractante.

Alors f admet un unique point fixe $l \in E$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ CV vers $l, \forall x_0 \in E$.

Existence: $(x_n)_n$ est de Cauchy. Soit $p > q$. Alors:

$$d(x_p, x_q) \leq \sum_{j=q}^{p-1} d(x_{j+1}, x_j) \leq \sum_{j=q}^{p-1} k^j d(x_1, x_0) \leq \left(\sum_{j=q}^{+\infty} k^j \right) d(x_1, x_0) = \frac{k^q}{1-k} d(x_1, x_0) \xrightarrow{q \rightarrow +\infty} 0 \text{ car } 0 < k < 1$$

↑
inégalité triangulaire $d(x_{j+1}, x_j) = d(f^j(x_1), f^j(x_0)) \leq k^j d(x_1, x_0)$

D'où $(x_n)_n$ est de Cauchy dans E complet donc CV vers $l \in E$. Puisque f est lipschitzienne, elle est continue. Donc par passage à la limite dans $x_{n+1} = f(x_n)$, $l = f(l)$.

Unicité: Soit $l' \neq l$ tel que $f(l') = l'$. Alors $d(l, l') = d(f(l), f(l')) \leq k d(l, l')$. Or, $d(l, l') > 0$ donc $1 \leq k \Rightarrow \text{c'est impossible}$.
D'où $l = l'$.

Théorème (Cauchy-Lipschitz linéaire): Soit I un segment de $\mathbb{R}$, $A \in C^0(I, M_n(\mathbb{C}))$,

$B \in C^0(I, \mathbb{C}^n)$ et $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{C}^n$. Alors il existe une unique solution définie sur I de

$$\begin{cases} y'(t) = A(t)y(t) + B(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (\mathcal{L}).$$

1) **Reformulation:** y est solution de $(\mathcal{L})$ si $\Phi(y) = y$ où Φ est définie par:

$$\forall t \in I, \Phi(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^t (A(s)y(s) + B(s)) ds$$

2) Φ est contractante: Notons $E := C^0(I, \mathbb{C}^n)$. C'est un espace complet pour $\|\cdot\|_\infty$. Soit $y, \tilde{y} \in E$.

On procède par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ que $\|\Phi^p(y)(t) - \Phi^p(\tilde{y})(t)\| \leq k^p \frac{|t-t_0|^p}{p!} \|y - \tilde{y}\|_\infty, \forall t \in I$ où $k = \sup_{t \in I} \|A(t)\| < +\infty$.

$\cdot p=0$: $\|\Phi^0(y)(t) - \Phi^0(\tilde{y})(t)\| = \|y(t) - \tilde{y}(t)\| \leq \|y - \tilde{y}\|_\infty$

$\cdot$ **Hérédité:** Soit $t > t_0$. Alors:

$$\begin{aligned} \|\Phi^{p+1}(y)(t) - \Phi^{p+1}(\tilde{y})(t)\| &\leq \int_{t_0}^t \|A(s)\Phi^p(y)(s) - A(s)\Phi^p(\tilde{y})(s)\| ds \leq \int_{t_0}^t \|A(s)\| \|\Phi^p(y)(s) - \Phi^p(\tilde{y})(s)\| ds \\ &= \Phi(\Phi^p(y))(t) - \Phi(\Phi^p(\tilde{y}))(t) \\ &\leq \int_{t_0}^t k \frac{k^p}{p!} (s-t_0)^p \|y - \tilde{y}\|_\infty ds \text{ car } \|A(s)\| \leq k \text{ et par H.R.} \\ &= \frac{k^{p+1}}{(p+1)!} (t-t_0)^{p+1} \|y - \tilde{y}\|_\infty \text{ car } \int_{t_0}^t (s-t_0)^p ds = \frac{(t-t_0)^{p+1}}{p+1} \end{aligned}$$

On traite de même le cas où $t < t_0$.

Soit $\delta > 0$ tel que $\forall t \in I, |t-t_0| \leq \delta$. Ainsi, $\|\Phi^p(y) - \Phi^p(\tilde{y})\|_\infty \leq \frac{(k\delta)^p}{p!} \|y - \tilde{y}\|_\infty$.

D'où, pour p assez grand, $\frac{(k\delta)^p}{p!} < 1$ i.e. Φ^p est contractante.

3) **Théorème du point fixe:** Par le théorème du point fixe de Picard, Φ^p admet un unique point fixe $y \in E$.

Alors y est aussi l'unique point fixe de Φ . En effet, puisque $\Phi^p(y) = y$, alors $\Phi(\Phi^p(y)) = \Phi(y) = \Phi^p(y) = y$.

Par unicité, $\Phi(y) = y$. De plus, y est l'unique point fixe de Φ car si $\Phi(y') = y'$, alors $\Phi^p(y') = y'$ d'où $y' = y$.

D'après 1), y est l'unique solution de $(\mathcal{L})$.