

Lemme: Soit E un $\mathbb{F}_q$ -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Alors $v \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable ssi $v^q = v$.

- Si v est diagonalisable, $\pi_v(X) = \prod_{\lambda \in \mathbb{F}_q} (X - \lambda)$ où $\phi(v) \subset \mathbb{F}_q$. Mais $X^q - X = \prod_{\lambda \in \mathbb{F}_q} (X - \lambda)$ est multiple de π_v , donc $X^q - X$ annule v .
- Si $v^q = v$, alors v est annulé par $X^q - X = \prod_{\lambda \in \mathbb{F}_q} (X - \lambda)$ scindé à racines simples. Donc v est diagonalisable.

Lemme: Notons $D(E) = \{v \in \mathcal{L}(E); v^q = v\}$ et $\mathbb{F}_q = \{1, \dots, q\}$

Alors, $\forall v \in D(E)$, $E = \bigoplus_{k=1}^q \text{Ker}(v - \lambda_k \text{id})$.

v est annulé par $X^q - X = \prod_{k=1}^q (X - \lambda_k)$ donc par le lemme des noyaux, $E = \bigoplus_{k=1}^q \text{Ker}(v - \lambda_k \text{id})$

Lemme: Notons $\mathcal{F} = \{(E_k)_{1 \leq k \leq q} \subset E; E = \bigoplus_{k=1}^q E_k\}$ et $\psi: D(E) \rightarrow \mathcal{F}$

Alors ψ est bijective.

ψ est bien définie par le lemme précédent.

injective: Soit $v, w \in D(E)$ tq $\psi(v) = \psi(w)$. Alors $\forall 1 \leq k \leq q$, $\forall x \in \text{Ker}(v - \lambda_k \text{id}) = \text{Ker}(w - \lambda_k \text{id})$, $v(x) = w(x) = \lambda_k x$. D'où $v = w$ car $E = \bigoplus_{k=1}^q \text{Ker}(v - \lambda_k \text{id})$.

surjective: Soit $(E_k)_{1 \leq k \leq q} \in \mathcal{F}$. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$ tq $v|_{E_k} = \lambda_k \text{id}_{E_k}$, $\forall 1 \leq k \leq q$. Alors $v \in D(E)$ et $\psi(v) = (E_k)_{1 \leq k \leq q}$.

Lemme: On a $\mathcal{F} = \bigsqcup_{\substack{(n_1, \dots, n_q) \in \mathbb{N}^q \\ n_1 + \dots + n_q = n}} \mathcal{F}_{(n_1, \dots, n_q)}$ où $\mathcal{F}_{(n_1, \dots, n_q)} = \{(E_k)_{1 \leq k \leq q} \in \mathcal{F}; \forall 1 \leq k \leq q, \dim E_k = n_k\}$.

Alors l'action $GL(E) \times \mathcal{F}_{(n_1, \dots, n_q)} \rightarrow \mathcal{F}_{(n_1, \dots, n_q)}$ est transitive.

$(v, (E_1, \dots, E_q)) \mapsto (v(E_1), \dots, v(E_q))$

L'action est bien définie car si $E = \bigoplus_{k=1}^q E_k$ avec $\dim E_k = n_k$, alors $E = v(E) = \bigoplus_{k=1}^q v(E_k)$ et $\dim(v(E_k)) = \dim(E_k) = n_k$.

transitive: Soit $(E_k), (F_k) \in \mathcal{F}_{(n_1, \dots, n_q)}$, $\mathcal{B} = \bigcup_{k=1}^q \mathcal{B}_k$, $\mathcal{B}' = \bigcup_{k=1}^q \mathcal{B}'_k$ des bases de E tq $\mathcal{B}_k$ base de E_k et $\mathcal{B}'_k$ base de F_k . Puisque $\dim E_k = \dim F_k = n_k$, on peut définir $v \in GL(E)$ par $v(\mathcal{B}_k) = \mathcal{B}'_k$, $\forall 1 \leq k \leq q$. Donc $v(E_k) = F_k$, $\forall 1 \leq k \leq q$.

Lemme: On a $|\text{Stab}(E_1, \dots, E_q)| = \prod_{k=1}^q |GL(E_k)|$ et $|\mathcal{F}_{(n_1, \dots, n_q)}| = \frac{|GL(E)|}{\prod_{k=1}^q |GL(E_k)|}$

On a $\text{Stab}(E_1, \dots, E_q) = \{v \in GL(E); v|_{E_k} \in GL(E_k), \forall 1 \leq k \leq q\}$. En effet,

si $v(E_k) = E_k$, $\forall 1 \leq k \leq q$, alors $v|_{E_k} \in GL(E_k)$, $\forall 1 \leq k \leq q$

si $v|_{E_k} \in GL(E_k)$, $v(E_k) = v|_{E_k}(E_k) = E_k$, $\forall 1 \leq k \leq q$.

D'où $\text{Stab}(E_1, \dots, E_q) \cong \prod_{k=1}^q GL(E_k)$ et $|\text{Stab}(E_1, \dots, E_q)| = \prod_{k=1}^q |GL(E_k)|$.

Puisqu'il n'y a qu'une seule orbite, $|\mathcal{F}_{(n_1, \dots, n_q)}| = \frac{|GL(E)|}{|\text{Stab}(E_1, \dots, E_q)|} = \frac{|GL(E)|}{\prod_{k=1}^q |GL(E_k)|}$.

Théorème :

$$|D(E)| = \sum_{\substack{(n_1, \dots, n_q) \in \mathbb{N}^q \\ n_1 + \dots + n_q = n}} \frac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{|GL_{n_1}(\mathbb{F}_q)| \cdots |GL_{n_q}(\mathbb{F}_q)|}$$

On a vu que $|D(E)| = |F| = \sum_{\substack{(n_1, \dots, n_q) \in \mathbb{N}^q \\ n_1 + \dots + n_q = n}} |F_{(n_1, \dots, n_q)}|$

et $|F_{(n_1, \dots, n_q)}| = \frac{|GL(E)|}{\prod_{k=1}^q |GL(E_k)|} = \frac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{\prod_{k=1}^q |GL_{n_k}(\mathbb{F}_q)|}$, d'où la formule.