

Théorème de Bloch

Alexandre Abouda

7 juillet 2025

Proposition (Théorème de Bloch). Soient $R > 1$ et $f : D(0, R) \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que $|f'(0)| = 1$. Alors $f(\mathbb{D})$ contient un disque de rayon $\frac{1}{16}$.

Application. Soit $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction entière non constante. Alors $F(\mathbb{C})$ contient des disques de rayons arbitrairement grands.

On procède en plusieurs étapes.

Lemme 1. Soit $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe bornée telle que $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$. On note $A = \sup_{z \in \mathbb{D}} |g(z)| < +\infty$. Alors $D(0, \frac{1}{4A}) \subseteq g(\mathbb{D})$.

Démonstration du lemme 1. Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus g(\mathbb{D})$. La fonction holomorphe $z \mapsto 1 - \frac{g(z)}{\alpha}$ ne s'annule pas. Notons h la détermination de sa racine carrée telle que $h(0) = 1$. En dérivant par rapport à z l'égalité $h^2(z) = 1 - \frac{g(z)}{\alpha}$ en 0, on obtient

$$h'(0) = -\frac{1}{2\alpha}. \quad (1)$$

Soit $r \in [0, 1[$. L'identité de Parseval appliquée à $\theta \mapsto h(re^{i\theta})$ donne

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{h^{(n)}(0)}{n!} \right|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |h(re^{i\theta})|^2 d\theta$$

d'où, d'après (1),

$$1 + \frac{r^2}{4|\alpha|^2} \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |h(re^{i\theta})|^2 d\theta \leq 1 + \frac{A}{|\alpha|}$$

par inégalité triangulaire. En faisant tendre r vers 1, on obtient $|\alpha| \geq \frac{1}{4A}$. Ceci montre l'inclusion $\mathbb{C} \setminus g(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{C} \setminus D(0, \frac{1}{4A})$, d'où le résultat. $\square$

Lemme 2. Soient $M, R > 0$, $z_0 \in \mathbb{C}$ et $f : D(z_0, R) \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe vérifiant $f'(z_0) \neq 0$ et $f(D(z_0, R)) \subseteq D(f(z_0), M)$. Alors $D\left(f(z_0), \frac{|f'(z_0)|^2 R^2}{4M}\right) \subseteq f(D(z_0, R))$.

Démonstration du lemme 2. On pose $g : z \in \mathbb{D} \mapsto \frac{1}{f'(z_0)R}(f(z_0 + Rz) - f(z_0))$ de sorte que $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$. La fonction g est bornée, avec $\sup |g| \leq \frac{M}{|f'(z_0)|R}$. D'après le lemme 1,

$$D\left(0, \frac{|f'(z_0)|R}{4M}\right) \subseteq \frac{1}{|f'(z_0)|R}(f(D(z_0, R)) - f(z_0))$$

c'est-à-dire

$$D\left(f(z_0), \frac{|f'(z_0)|^2 R^2}{4M}\right) \subseteq f(D(z_0, R)).$$

□

Lemme 3. Soient $R > 1$ et $f : D(0, R) \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que $|f'(0)| = 1$. Soit $\psi : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}$. Il existe $z_0 \in \mathbb{D}$ tel que $\psi(z_0) = 1$ et $\psi(z) \leq 1$ pour $r \leq |z| \leq 1$ où $r = |z_0|$.

Démonstration du lemme 3. L'ensemble $Y = \{z \in \mathbb{D}; \psi(z) \geq 1\}$ est non vide (car contient 0) et c'est un fermé dans le compact $\mathbb{D}$ puisque ψ est continue. Donc Y est compact. Soit alors $z_0 \in Y$ de module maximal. D'après l'expression de ψ , z_0 appartient à $\mathbb{D}$ donc z_0 convient.

□

Revenons à la proposition.

Démonstration de la proposition. Soient z_0 et $r = |z_0|$ comme dans le lemme 3. Montrons que $f\left(D\left(z_0, \frac{1-r}{2}\right)\right) \subseteq D(f(z_0), 1)$.

Si $w \in \mathbb{D}$ est de module $\frac{1+r}{2}$, $\psi(w) \leq 1$ c'est-à-dire $|f'(w)| \leq \frac{2}{1-r}$. Le principe du maximum appliqué à f' impose

$$\forall w \in D\left(0, \frac{1+r}{2}\right), |f'(w)| \leq \frac{2}{1-r}. \quad (2)$$

Soit $z \in D\left(z_0, \frac{1-r}{2}\right)$. Par inégalité des accroissements finis,

$$|f(z) - f(z_0)| \leq \sup_{w \in D\left(z_0, \frac{1-r}{2}\right)} |f'(w)| |z - z_0|$$

mais comme $D\left(z_0, \frac{1-r}{2}\right) \subseteq D\left(0, \frac{1+r}{2}\right)$ par inégalité triangulaire,

$$\sup_{w \in D\left(z_0, \frac{1-r}{2}\right)} |f'(w)| \leq \frac{2}{1-r}$$

d'après (2). On en déduit que $|f(z) - f(z_0)| \leq 1$, d'où l'inclusion voulue.

Le lemme 2 appliqué pour $R = \frac{1-r}{2}$ et $M = 1$ fournit

$$D\left(f(z_0), \frac{|f'(z_0)|^2 \left(\frac{1-r}{2}\right)^2}{4}\right) \subseteq f(D(z_0, R)) \subseteq f(\mathbb{D}). \quad (3)$$

Comme $\psi(z_0) = 1$, (3) donne

$$D\left(f(z_0), \frac{1}{16}\right) \subseteq f(\mathbb{D}).$$

□

Pour l'application, on procède comme suit. Comme F est une fonction entière non constante, il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $F'(z_0) \neq 0$. Quitte à considérer $z \longmapsto \frac{F(z+z_0)}{F'(z_0)}$, on se ramène au cas où $F'(0) = 1$. Soit $\lambda > 0$. Le théorème de Bloch appliqué à $z \longmapsto \frac{F(\lambda z)}{\lambda}$ montre que $F(\mathbb{C})$ contient un disque de rayon $\frac{\lambda}{16}$.