

Ellipsoïde de John Loewner

Nico

Prérequis : Théorème spectral, orthogonalisation simultanée.

Définition : On dit que K est un corps convexe de $\mathbb{R}^n$ si K est un compact convexe d'intérieure non vide de $\mathbb{R}^n$.

Objectif : Etant donné un corps convexe K , on souhaite montrer qu'il existe une unique ellipsoïde de volume minimal contenant K , centré en $b \in \mathbb{R}^n$.

Quitte à translater, on peut supposer $b = 0$.

Notations :

1. $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles. $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles définies positives.
2. Etant donnée $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on lui associe la forme quadratique $q_S(x) = {}^t x S x$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, et $\mathcal{E}_S = \{x \in \mathbb{R}^n : q_S(x) \leq 1\}$ son ellipsoïde associée.

On rappelle le résultat suivant, que l'on saura démontrer si nécessaire :

Proposition : $\forall S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\|S\|_2 = \rho(S)$, où $\rho(S) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \text{Spec}(S)\}$.

On souhaite montrer dans un premier temps que l'on peut relier le volume $\text{Vol}(\mathcal{E}_S)$ de l'ellipsoïde au déterminant de S .

Pour $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on définit $\mu(A) = \det(A)^{-\frac{1}{2}}$

Proposition : Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, alors $\text{Vol}(\mathcal{E}_S) = \mu(S) \text{Vol}(B)$, où B désigne la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ pour la norme euclidienne.

Démonstration. Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Par définition du volume :

$$\text{Vol}(\mathcal{E}_S) = \int_{\mathcal{E}_S} dx = \int_{q_S(x) \leq 1} dx$$

Par le théorème spectral, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ diagonale, où les $a_i > 0$, telle que $S = {}^t P D P$. Il vient que $\det S = \prod_{i=1}^n a_i$, $\mu(S) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{a_i}}$, et $q_S(x) = {}^t (Px) D P x$. Puisque $x \mapsto Px$ est un $\mathcal{C}^1$ difféo⁽¹⁾, on peut effectuer

(1). $x \mapsto Px$ est bijective. Sa différentielle vaut P , inversible car P l'est.

le changement de variables $y = Px$, qui est bien un $\mathcal{C}^1$ difféo de $\mathbb{R}^n$, de jacobien $\det P = 1$. D'où :

$$\text{Vol}(\mathcal{E}_S) = \int_{a_1 y_1^2 + \dots + a_n y_n^2 \leq 1} dy_1 \dots dy_n$$

On effectue le changement de variables $x_i = \frac{z_i}{\sqrt{a_i}}$, de Jacobien $\prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{a_i}} = \mu(S)$.

$$\text{Vol}(\mathcal{E}_S) = \mu(S) \int_{z_1^2 + \dots + z_n^2 \leq 1} dz_1 \dots dz_n = \mu(S) \text{Vol}(B)$$

□

Ainsi, si l'on considère $\text{Vol}(B)$ comme unité, on a que "le volume l'ellipsoïde est $\mu(S)$ ". Afin de construire notre ellipsoïde contenant K , on souhaite exhiber quelques propriétés sur μ :

Propriétés de convexités :

1. $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est convexe
2. La fonction μ est strictement convexe sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Démonstration. 1. Soit $S, T \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Soient q_S et q_T leurs formes quadratiques associées. Puisque q_S est définie positive, par orthogonalisation simultanée, il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ orthonormée pour q_S , et orthogonale pour q_T . Ainsi, il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et D diagonale, à diagonales strictement positives, telle que $S = {}^t P I_n P = {}^t P P$ et $T = {}^t P D P$. Soit $t \in [0, 1]$,

$$tS + (1-t)T = {}^t P (tI_n + (1-t)D) P$$

On a que $tI_n + (1-t)D$ est diagonale, à diagonales strictement positives, d'où $tS + (1-t)T \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

2. Avec les mêmes notations, on a que :

$$\mu(tS + (1-t)T) = \mu({}^t P (tI_n + (1-t)D) P) = \frac{1}{|\det P|} \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{t + (1-t)a_i}}$$

Où $D = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$. En passant au log, et en utilisant sa concavité (et donc convexité de $-\ln$) :

$$\ln(\mu(tS + (1-t)T)) = - \left(\frac{1}{2} \ln(|P|^2 t + |P|^2 (1-t)a_i) \right) \leq - \left(\frac{t \ln |P|^2 + (1-t) \ln(|P|^2 a_i)}{2} \right)$$

D'où par croissance et convexité de l'exponentielle :

$$\mu(tS + (1-t)T) \leq \exp\left(-\left(\frac{t \ln |P|^2 + (1-t) \ln(|P|^2 a_i)}{2}\right)\right) \leq t\mu(S) + (1-t)\mu(T)$$

Par stricte concavité du log, on a égalité si et seulement si $a_i = 1$ pour tout i , autrement dit, $S = T$. D'où μ est strictement convexe. □

On introduit le résultat principal du développement :

Théorème : Soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$. Il existe un unique ellipsoïde centré en 0 de volume minimal contenant K .

Démonstration. Soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$. Entre autre, K est borné. Autrement dit, il existe $r > 0$ tel que $K \subseteq B_{\|\cdot\|_2}(0, R) = \{x : {}^t x x \leq R^2\} = \mathcal{E}_{S_r}$, où $S_r = \frac{1}{r^2} I_n$. On considère l'ensemble :

$$C = \{S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) : \mu(S) \leq \mu(S_r) \text{ et } K \subseteq \mathcal{E}_S\}$$

Si C admet un unique minimum S_C , alors $\mathcal{E}_{S_C}$ est l'ellipsoïde recherchée. Pour montrer l'existence, on donnera qu'il est compact non vide. Pour montrer l'unicité, on ajoutera de plus un argument de convexité.

i) **Non vide :** Par construction de C , $S_r \in C$.

ii) **Fermé :** On peut voir C comme l'intersection de l'ensemble $A := \{S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) : \mu(S) \leq \mu(S_r)\}$ et $B := \{S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) : \forall x \in K, {}^t x S x \leq 1\} = \bigcap_{x \in K} \{S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) : {}^t x S x \leq 1\}$.

Si l'on considère μ comme une application de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on a que $A = \mu^{-1}([\mu(S_r), +\infty[)$.

Par image réciproque d'un fermé par une application continue, A est fermé.

De même, par continuité de $x \mapsto {}^t x S x$, B est fermé comme intersections de fermés. D'où C est fermé comme intersection de fermés.

iii) **Borné :** Soit $S \in C$. Puisque K est d'intérieur non vide, il existe $b \in \mathbb{R}^n$ et $\delta > 0$ tels que $B(b, \delta) \subseteq K$. Pour tout $x \in B(0, \delta)$, $x+b \in B(b, \delta) \subseteq K \subseteq \mathcal{E}_S$ ⁽²⁾. D'où $q_S(x+b) \leq 1$. Or $\sqrt{q_S}$ est une norme car q_S est définie positive. Entre autre, elle satisfait l'inégalité triangulaire, d'où :

$$\sqrt{q_S(x)} = \sqrt{q_S(x+b-b)} \leq \sqrt{q_S(x+b)} + \sqrt{q_S(b)} \leq 1 + 1 = 2$$

(2). $\|x+b-b\|_2 = \|x\|_2 \leq \delta$

car $b \in K \subseteq \mathcal{E}_S$.

D'où $q_S(x) \leq 4$ pour tout x tel que $\|x\|_2 \leq \delta$.

On souhaite majorer $\|S\|_2 = \rho(S)$ par une constante indépendante de S . Soit λ une valeur propre de S et x un vecteur propre associé tel que $\|x\| = \delta$.

Alors :

$$\lambda\|x\|^2 = \lambda^t x x = {}^t x S x = q_S(x) \leq 4$$

D'où $\lambda \leq \frac{4}{\delta^2}$. D'où $\rho(S) \leq \frac{4}{\delta^2}$, et donc $\|S\|_2 \leq \frac{4}{\delta^2}$. D'où C est borné

- iv) **Convexité** : Soit $S, T \in C$, $t \in [0, 1]$. D'une part, par convexité de μ , $\mu(tS + (1-t)T) \leq t\mu(S) + (1-t)\mu(T) \leq t\mu(S_r) + (1-t)\mu(S_r) = \mu(S_r)$ car $S, T \in C$. D'autre part, soit $x \in K$,

$$q_{tS+(1-t)T}(x) = {}^t x(tS + (1-t)T)x = t {}^t x S x + (1-t) {}^t x T x \leq t + (1-t) = 1$$

Car $K \subseteq \mathcal{E}_S, \mathcal{E}_T$. D'où $K \subseteq \mathcal{E}_{tS+(1-t)T}$. Ainsi, $tS + (1-t)T \in K$. D'où C est convexe.

Finalement, C étant un compact d'intérieur non vide, C admet un minimum. Montrons qu'il est unique : Soient S, T deux minimums de C . Alors par convexité de C , $\frac{S+T}{2} \in C$. Puisque S et T sont deux minimums, on a que $\mu(S) = \mu(T)$. D'où $\mu(\frac{S+T}{2}) \leq \frac{\mu(S) + \mu(T)}{2} = \mu(S)$. Puisque le volume de S est minimal, $\frac{\mu(S) + \mu(T)}{2} = \mu(S) = \mu(\frac{S+T}{2})$. Par stricte convexité de μ , $S = T$. On a ainsi unicité du minimum. $\square$

Je propose en bonus de démontrer le principe de d'orthogonalisation simultanée :

Démonstration. Soit Q, Q' deux formes quadratiques réelles définies sur un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension n . On suppose Q définie positive. Montrons que dans une base de E , les matrices Q et Q' sont diagonales.

1. Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $T \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $Q(x) = {}^t x S x$ et $Q'(x) = {}^t x T x$, dans une base de E (identifié à $\mathbb{R}^n$). Puisque S est définie positive, on peut introduire un nouveau produit scalaire :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \langle x, y \rangle_S = {}^t x S y$$

Montrons qu'il s'agit bien d'un produit scalaire :

- (a) Définie positive : soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que ${}^t x S x = 0$. Alors puisque S est définie positive, $x = 0$.
- (b) Linéaire à gauche : claire.

(c) Symétrique : $\langle x, y \rangle_S = {}^t x S y = {}^t x {}^t S y = {}^t (Sx) y = {}^t y S x = \langle y, x \rangle_S$.

Ainsi, $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle_S)$ est un espace euclidien.

2. On a que $Q(x) = {}^t x S x = \langle x, x \rangle_S$. Donc pour toute base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de l'espace euclidien ci-dessus, la matrice de Q est l'identité.

On a que $Q'(x) = {}^t x T x = {}^t x T S^{-1} S x = {}^t (S^{-1} T x) S x = \langle S^{-1} T x, x \rangle_S$. Soit $u : x \mapsto S^{-1} T x$. Il s'agit d'une application linéaire, de plus, $\langle S^{-1} T x, y \rangle_S = {}^t x T x$ par ce qui a été fait au dessus. Et $\langle x, S^{-1} T y \rangle_S = {}^t x S S^{-1} T y = {}^t x T y$. D'où $u = u^*$, ie, u est auto-adjoint. Par le théorème spectral, il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice de u est diagonale. Donc $S^{-1} T$ est diagonalisable. Mais dans cette même base, on a vu que T est diagonalisable. D'où $T = S S^{-1} T = P I_n P^{-1} P D P^{-1} = P D P^{-1}$

□

Question 1. *Démontrer le principe d'orthogonalisation simultanée.*

Question 2. *Montrer que le déterminant sur $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est strictement concave.*

Question 3. *Montrer que pour toute forme quadratique réelle définie positive q , $\sqrt{q}$ est une norme.*

Question 4. *Que dire d'une ellipsoïde centrée en $b \neq 0$?*

Question 5. *On suppose a compact d'intérieur non vide. Trouver une hypothèse minimale sur K .*

Référence

ISENMANN, Lucas (2024). *l'oral à l'agrégation de mathématiques*. 2ème édition. ellipses.

Recasages

Leçon 149 : Déterminant. Exemples et applications.

Leçon 157 : Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.

Leçon 171 : Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.

Leçon 181 : Convexité dans $\mathbb{R}^n$. Applications en algèbre et en géométrie.

Leçon 229 : Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.