50 Transformée de Fourier-Plancherel

THÉORÈME 50.1 (PLANCHEREL) *Soit $f \in L^2 \cap L^2$. Alors $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$. En particulier, $\mathcal{F}(L^1 \cap L^2) \subset L^2$ et, de plus, cette partie est dense.*

PREUVE. Soit $f \in L^1 \cap L^2$. On pose $\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$ et $g = f * \tilde{f}$, c'est possible car f et $\tilde{f}$ sont L^1, et on a alors $g \in L^1$. On a :

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\overline{f(-y)}\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} f(x+y)\overline{f(y)}\mathrm{d}y =< f, f_{-x} >_{L^2}$$

Par continuité de la translation $x \to f_{-x}$ de $\mathbb{R}$ dans L^2 et par continuité du produit scalaire, on trouve que g est continue. De plus g est bornée par $\|f\|_2^2$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Par propriété de la transformée de Fourier et du produit de convolution, on a $\hat{g}(x) = |\hat{f}(x)^2|$

On introduit alors la suite $h_\lambda(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\lambda}{\lambda^2+x^2}$. C'est un bon noyau au sens où h_λ est positive, d'intégrale 1, et $\int_{|x|\geq\eta} h_\lambda \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0$. C'est la transformée de Fourier inverse de $H(\lambda t) = e^{-\lambda|t|}$ par un calcul simple.

On regarde alors $g * h_\lambda(0)$ où on passera à la limite quand λ tend vers 0. Comme g est L^1 d'après le théorème de Fubini, on a :

$$\begin{aligned} g * h_\lambda(0) = \int g(-t)h_\lambda(t)\mathrm{d}t &= \int g(-t) \int H(\lambda t)e^{ixt}\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\ &= \int (\int g(-t)e^{ixt}\mathrm{d}t)H(\lambda x)\mathrm{d}x \\ &= \int \hat{g}(x)H(\lambda x)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Comme h_λ est un bon noyau et g est bornée et continue en 0, on a d'une part :

$$g * h_\lambda(0) \xrightarrow[\lambda\to 0]{} g(0) = \|f\|_2^2$$

D'autre part, comme $\hat{g}(x)$ est positive et $H(\lambda t)$ converge simplement vers 1 en croissant quand λ tend vers 0, on a par le théorème de convergence monotone :

$$g * h_\lambda(0) \xrightarrow[\lambda\to 0]{} \int \hat{g} = \|\hat{f}\|_2^2$$

D'où, $f\|^2 = \|f\|^2$ et $\hat{f}$ est dans L^2.

Pour montrer que l'image Y est dense, on regarde les transformées de Fourier des fonctions $e^{i\alpha x}H(\lambda_x) \in L^1 \cap L^2$ qui sont les $h_\lambda(\alpha - t)$. Si $f \in L^2 \cap Y^\perp$, alors pour tout α,

$$\int \overline{f(t)}h_\lambda(\alpha - t) = 0 = \overline{f} * h_\lambda(\alpha)$$

Comme h_λ est un bon noyau et $\overline{f} \in L^2$, on trouve $\overline{f} = \lim_{\alpha\to 0} \overline{f} * h_\lambda(\alpha) = 0$ dans L^2. On a donc montré que $Y^\perp = \{0\}$, c'est-à-dire Y est dense. □

COROLLAIRE 50.2 *Il existe un unique opérateur de L^2 dans L^2 qui coïncide avec $\mathcal{F}$ sur $L^1 \cap L^2$.*

PREUVE. $L^1 \cap L^2$ est une partie dense de L^2 ce que l'on voit en tronquant la fonction : si $f \in L^2$, alors $f_n = f1_{[-n,n]}$ est dans L^1 car est L^2 et son support est de mesure finie. De plus, $\|f - f_n\|^2 = \int_{|x|>n} |f|^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car f est dans L^2. L'opérateur $\mathcal{F} : L^1 \cap L^2 \to L^2$ est continu pour la norme 2 d'après le théorème de Plancherel (c'est même une isométrie), et l'espace L^2 est complet, donc par le théorème de prolongement des applications uniformément continues (une application linéaire est continue ssi elle est uniformément continue), il existe un unique prolongement de $\mathcal{F}$ à L^2. Le prolongement est encore une isométrie de la norme 2 par passage à la limite dans l'égalité du théorème de Plancherel. Si on sait de plus que l'image est dense, alors l'opérateur est surjectif (prendre une suite de Cauchy..) et par l'inverse est continue car Fourier est une isométrie. $\square$

Leçons : prolongement de fonctions.