Références :
Objectif Agrégation, Vincent Beck

Théo (Principe du prolongement analytique)**.** *Soit U un ouvert connexe. Si deux fonctions analytiques coïncident sur un sous-ensemble $D \subset U$ ayant un point d'accumulation dans U, alors elles sont égales sur U.*

Théo (Intégrale dépendant d'un paramètre holomorphe)**.** *Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \times X \longmapsto \mathbb{C}$. Posons*

$$\forall z \in \mathbb{C}, F(z) = \int_X f(z,x) d\mu(x).$$

Supposons que

(i) pour tout $z \in U$, l'application $x \mapsto f(z,x)$ est mesurable

(ii) il existe une partie $N \subset X$ de mesure nulle telle que pour tout $x \notin N$, l'application $z \mapsto f(z,x)$ est holomorphe.

(iii) pour tout compact K de U, il existe $g \in L^1(X)$ (indépendante de z) telle que $|f(z,x)| \leq g(x)$ pour tout $x \notin N$ et pour tout z dans K.

Alors F est holomorphe sur U et pour tout $z \in U$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F^{(n)}(z) = \int_X \frac{\partial^n f}{\partial z^n}(z,x) d\mu(x).$$

Déf. Soit H un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. L'espace H est dit *préhilbertien* s'il est muni d'un produit scalaire (produit scalaire hermitien si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Ainsi, un espace préhilbertien est un couple $(H, < .,. >)$ où H est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $< .,. >$ un produit scalaire sur H. Si un espace préhilbertien est complet pour la norme $||.||$ associée au produit scalaire, on dit que c'est un *espace de Hilbert*.

Déf. Soit $(H, < .,. >)$ un espace de Hilbert. On dit qu'une famille $(e_i)_{i \in I}$ est une *base hilbertienne* de H si elle est :

(i) orthogonale : $< e_i, e_j >= 0$, pour tout $i, j \in I$ tels que $i \neq j$,

(ii) normée : $< e_i, e_i >= 1$ pour tout $i \in I$,

(iii) totale : $H = \overline{Vect(e_i, i \in I)}$.

Déf. Soit (E, d) un espace métrique. On dit que (E, d) est *séparable* si tout ouvert non vide de E contient au moins un point d'une partie dénombrable de E.

Théo. *Soit $(H, < .,. >)$ un espace de Hilbert séparable et $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille orthonormée de H. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) La famille orthonormée $(e_n)_n$ est une base hilbertienne.

(ii) Pour tout $x \in H$,

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} < x, e_n > e_n,$$

ce qui signifie

$$\lim_{N \to +\infty} \left\| x - \sum_{n=0}^{N} < x, e_n > e_n \right\| = 0.$$

(iii) Pour tout $x \in H$,

$$||x||^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} | < x, e_n > |^2.$$

(iv) On a

$$(e_n, n \in \mathbb{N})^\perp = \{0\}.$$

De plus l'application

$$\begin{array}{rcl} \Delta : H & \longrightarrow & l^2(\mathbb{N}) \\ x & \longmapsto & (< x, e_n >)_{n \in \mathbb{N}} \end{array}$$

est bien définie et réalise une isométrie surjective de H sur $l^2(\mathbb{N})$.

Déf. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle *fonction poids* une fonction $\rho : I \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable, strictement positive et telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_I |x|^n \rho(x)dx < +\infty.$$

On note $L^2(I,\rho)$ l'espace des fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité ρ par rapport à la mesure de Lebesgue c'est-à-dire muni du produit scalaire :

$$< f, g >_\rho = \int_I f(x)\overline{g(x)}\rho(x)dx.$$

L'espace $L^2(I,\rho)$ est un espace de Hilbert.

Déf. Il existe une unique famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes unitaires orthogonaux deux à deux tels que $\deg(P_n) = n$. Cette famille s'appelle la famille des *polynômes orthogonaux* associés à la fonction ρ.

Théo (Base hibertienne de polynômes orthogonaux)**.** *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et ρ une fonction poids. S'il existe $\alpha > 0$ tel que :*

$$\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)dx < +\infty$$

alors la famille des polynômes $(\frac{P_n}{||P_n||_\rho})_{n\in\mathbb{N}}$ forme une base hilbertienne de $L^2(I,\rho)$ pour la norme $||.||_\rho$.

Démonstration. Par définition, $(\frac{P_n}{||P_n||_\rho})_{n\in\mathbb{N}}$ forment une famille orthonormée.
On veut montrer que $\{\frac{P_n}{||P_n||_\rho}, n \in \mathbb{N}\}^\perp = \{x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N}\}^\perp = \{0\}$.
On sait déjà, par définition du poids que $x \mapsto x^n \in L^2(I,\rho)$.
Soit $f \in L^2(I,\rho)$. On va utiliser la fonction auxiliaire ϕ définie par

$$\phi(x) = \begin{cases} f(x)\rho(x) \text{ si } x \in I \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Montrons que $\phi \in L^1(\mathbb{R})$. On a, pour tout $t \geq 0$, $t \leq \frac{1}{2}(1+t^2)$. Ainsi, on obtient l'inégalité

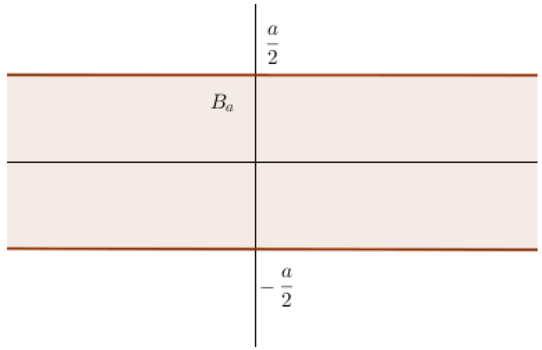
$$\forall x \in I, |f(x)|\rho(x) \leq \frac{1}{2}(1+|f(x)|^2)\rho(x).$$

Comme ρ et ρf^2 sont intégrables sur I, on en déduit que $\phi \in L^1(\mathbb{R})$. On peut donc considérer sa transformée de Fourier, c'est-à-dire pour $\omega \in \mathbb{R}$,

$$\hat{\phi}(\omega) = \int_I f(x)e^{-i\omega x}\rho(x)dx.$$

Montrons que $\hat{\phi}$ se prolonge en une fonction F holomorphe sur

$$B_\alpha = \left\{z \in \mathbb{C}, |\mathcal{I}m(z)| < \frac{\alpha}{2}\right\}.$$



Posons, maintenant,

$$g(z,x) = e^{-izx}f(x)\rho(x).$$

Soit $z \in B_\alpha$. On a

$$\int_I |g(z,x)|dx \leq \int_I e^{\alpha\frac{|x|}{2}}|f(x)|\rho(x)dx.$$

On utilise Cauchy-Schwarz et on obtient :

$$\int_I e^{\alpha\frac{|x|}{2}}|f(x)|\rho(x)dx \leq \left(\int_I e^{\alpha|x|}\rho(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_I |f(x)|^2\rho(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.(*)$$

On définit la fonction F par :

$$\forall z \in B_\alpha, F(z) = \int_I e^{-izx}f(x)\rho(x)dx = \int_I g(z,x)dx.$$

L'inégalité (*) montre que cette fonction est bien définie. On veut maintenant montrer qu'elle satisfait les hypothèses d'holomorphie sous le signe intégrale.

- Pour tout $z \in B_\alpha$, l'application $z \mapsto g(z,x)$ est mesurable sur I.
- Pour presque tout $x \in I$, l'application $z \mapsto g(z,x)$ est holomorphe sur B_α.
- Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|\mathcal{I}m(z)| \leq \frac{\alpha}{2}$, on a

$$|g(z,x)| \leq h(x) = e^{\alpha \frac{|x|}{2}} |f(x)| \rho(x),$$

  et l'inégalité (*) montre que $h \in L^1(I)$. La fonction F est donc holomorphe sur B_α et coïncide sur $\mathbb{R}$ avec $\hat{\phi}$. On peut donc calculer les dérivées de F :

$$\forall z \in B_\alpha, F^{(n)}(z) = (-i)^n \int_I x^n e^{-izx} f(x) \rho(x) dx.$$

  Ainsi, on obtient, en évaluant en 0 :

$$F^{(n)}(0) = (-i)^n \int_I x^n f(x) \rho(x) dx = (-i)^n < f, g_n >_\rho .$$

  où nous définissons g comme étant la fonction $x \mapsto x^n$.
  Supposons maintenant que $f \in Vect(x^n)^\perp$, i.e que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $< f, g_n >_\rho = 0$.
  On obtient alors

$$F^{(n)}(0) = 0.$$

  L'unicité du développement en série entière d'une fonction holomorphe montre que $F = 0$ sur un voisinage de 0. Par théorème de prolongement analytique implique alors que $F = 0$ sur le connexe B_α tout entier et donc en particulier sur l'axe réel. On déduit que $\hat{\phi} = 0$. Comme ϕ est une fonction intégrable, l'injectivité de la transformée de Fourier implique que $\phi = 0$. Comme $\rho(x) > 0$, on en déduit que $f(x) = 0$ pour tout $x \in I$. On a donc montré qu'une fonction orthogonale à tous les polynômes est nulle. On a donc bien que les polynômes orthogonaux forment une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$.

$\square$

Leçons possibles : 201 - 202 - 207 - 213 - 234 - 239 - 245 - 250