Théorème de Lévy et Théorème central [2Q] p552 - 549

Recasages : 234 - 235 - 241 209 - 218 - 239 - 266 - 250 - 261 - 262

Proposition : $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ ssi $\mathbb{E}[f(X_n)] \longrightarrow \mathbb{E}[f(X)]$ $\forall f \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R})$

Rappel : $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ lorsque $\mathbb{E}[f(X_n)] \to \mathbb{E}[f(X)]$ $\forall f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$

Preuve :

"$\Rightarrow$" $\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ donc c'est clair

"$\Leftarrow$" Supposons que $\forall f \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R})$, $\mathbb{E}(f(X_n)) \to \mathbb{E}(f(X))$

Soit $f \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R})$, $\varepsilon > 0$ et $A \in \mathbb{R}^+$ tq $\mu\{x : |x| \geq A\} \leq \varepsilon$.

On considère la fonction trapézoïdale φ valant 1 sur $[-A, A]$ et 0 sur $[-2A, 2A]$, si bien que :

$$\int_{\mathbb{R}} f(1-\varphi)\,d\mu \leq \mu(\{x : |x| \geq A\}) \leq \varepsilon$$

On a alors :

$$\int_{\mathbb{R}} f\,d\mu_n - \int_{\mathbb{R}} f\,d\mu = \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f(1-\varphi)\,d\mu_n}_{A_n} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \varphi f\,d\mu_n - \int_{\mathbb{R}} f\varphi\,d\mu}_{B_n} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} f(\varphi - 1)\,d\mu}_{C}$$

$|A_n| \leq \|f\|_\infty \left| 1 - \int_{\mathbb{R}} \varphi\,d\mu_n \right|$

$\leq \|f\|_\infty \left(1 - \int_{\mathbb{R}} \varphi\,d\mu_n\right)$.

Donc $\overline{\lim}_n |A_n| \leq \|f\|_\infty \int (1-\varphi)\,d\mu \leq \varepsilon \|f\|_\infty$

$|B_n| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ car $f\varphi \in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R})$

$|C| \leq \varepsilon \|f\|_\infty$.

D'où $\left| \int_{\mathbb{R}} f\,d\mu_n - \int_{\mathbb{R}} f\,d\mu \right| \leq 2\varepsilon \|f\|_\infty$. et ce $\forall \varepsilon > 0$ donc $\mathbb{E}(f(X_n)) \to \mathbb{E}(f$

Théorème (de Lévy) :

$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ ssi $\mathbb{E}[e^{itX_n}] \longrightarrow \mathbb{E}[e^{itX}]$ (i.e. $\varphi_{X_n} \xrightarrow{CVS} \varphi_X$) $\forall t \in \mathbb{R}$.

Preuve :

"$\Rightarrow$" $x \mapsto e^{itx} \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R})$ $\forall t \in \mathbb{R}$. D'où le résultat

"$\Leftarrow$" Soit f de la forme $f(x) = \int_{\mathbb{R}} \psi(t)\, e^{itx}\,dt$ avec $\psi \in L^1(\mathbb{R})$

Alors $\mathbb{E}[f(X_n)] = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f \varphi(t) e^{itx}\, dt\, d\mu_n(x)$

$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \mathbb{E}(e^{itX_n})\, dt$ (Fubini)

$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\, \mathbb{E}(e^{itX})\, dt$ (TCD)

$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^{itx}\, dt\, d\mu(x)$ (Fubini)

$= \mathbb{E}(f(X))$ donc ok !

À présent soit $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$.

Par densité de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, il existe $g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ tq $\|f-g\|_\infty \leq \varepsilon$

On $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (classe de Schwartz)

Puisque $\mathcal{F}$ la transformation de Fourier est bijective sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, il existe $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$ tq $g(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) e^{itx}\, dt$

Enfin, on a :

$$|\mathbb{E}(f(X_n)) - \mathbb{E}(f(X))| \leq \underbrace{|\mathbb{E}(f(X_n) - g(X_n))|}_{\leq \|f-g\|_\infty} + \underbrace{|\mathbb{E}(g(X_n)) - \mathbb{E}(g(X))|}_{\leq \varepsilon \text{ pour le } n^{\text{ème}} \text{ cas}} + \underbrace{|\mathbb{E}(f-g)(X)|}_{\leq \|f-g\|_\infty}$$

$\leq 3\varepsilon$

Théorème (théorème limite central) :

Pour (X_n) une suite v.a.r. i.i.d. de carré intégrable, de moyenne commune μ et de variance commune σ^2, alors :

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \longrightarrow Z, \quad Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Preuve : On suppose les X_n centrées (quitte à prendre $X_n - \mu = X_n$) et on va montrer que $\mathbb{E}(e^{it \frac{S_n}{\sigma\sqrt{n}}}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{E}(e^{itZ}) = e^{-\frac{t^2}{2}}$, $Z \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

$$\mathbb{E}\left[e^{i\frac{tS_n}{\sigma\sqrt{n}}}\right] \overset{\text{bij}}{=} \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^n e^{i\frac{tX_k}{\sigma\sqrt{n}}}\right] \overset{\text{ind.}}{=} \prod_{k=1}^n \mathbb{E}\left[e^{i\frac{tX_k}{\sigma\sqrt{n}}}\right] \overset{\text{i.d.}}{=} \prod_{k=1}^n \mathbb{E}\left[e^{i\frac{tX_1}{\sigma\sqrt{n}}}\right] = \left(\varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)^n$$

Les X_n sont de carré intégrable, on peut alors effectuer le développement de Taylor à l'ordre 2 comme suit en 0 :

$$\varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \varphi_{X_1}(0) + \frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\varphi_{X_1}'(0) + \frac{t^2}{2\sigma^2 n}\underbrace{\varphi_{X_1}''(0)}_{-\sigma^2} + \frac{\varepsilon_n}{n}, \ \varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$$= 1 - \frac{t^2}{2\sigma^2 n} + \frac{\varepsilon_n}{n}$$

D'où, par le lemme $\left(\varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)^n = \left(1 + \frac{-\frac{t^2}{2\sigma^2} + \varepsilon_n}{n}\right)^n \longrightarrow e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} = \frac{\varphi(t)}{\mathcal{N}(0,\sigma^2)}$ □

Lemme :

Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nbres complexes de limite $z \in \mathbb{C}$, alors on a :

$$\left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^z$$

Preuve (du lemme) :

Quitte à échanger, on considère que $1 + \frac{z_n}{n} \notin \mathbb{R}_-$ pour pouvoir considérer le $\mathrm{Log}\left(1+\frac{z_n}{n}\right)$

Et on a $\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n = e^{n \mathrm{Log}\left(1+\frac{z_n}{n}\right)} \sim e^{n \frac{z_n}{n}} =$

$\xrightarrow[n \to +\infty]{} e^z$ car $\mathrm{Log}\left(1+\frac{z_n}{n}\right) \sim \frac{z_n}{n}$.

Proposition :

X une v.a.r.

Si X^k est intégrable pour $k \geq 1$, les dérivées à l'origine existent jusqu'à l'ordre k et $\phi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}[X^k]$.

En particulier, $\phi_X(0) = 1$, $\phi_X'(0) = i\mathbb{E}[X]$ et $\phi''(0) = -\mathbb{E}[X^2]$

Preuve : Thm dérivation sous l'intégrale $h : (t,x) \mapsto e^{itx}$. Supposons X^k int.

$\Rightarrow$ pour presque tout $t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto h(t,x)$ est intégrable.

$\Rightarrow$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto h(t,x)$ est k-fois dérivable de dérivée k-ième $t \mapsto i^k x^k e^{itx}$

$\Rightarrow$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, $\left|\frac{\partial^k h}{\partial t^k}(t,x)\right| \leq |X|^k$ intégrable ne dépendant pas de t.

Par le théorème de dérivation sous l'intégrale, on a :

$$\phi_X^{(k)}(t) = i^k \int_{\mathbb{R}} x^k e^{itx} \, dx$$

D'où $\phi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}[X^k]$.