

Densité de $\mathcal{C}^\infty$ dans L^p .

[BRÉ] p 70.

Recarroyes: $\underline{234, 241, 201, 250, 208, 253, 209}$
~~234~~ ~~208~~ ~~253~~

Lemme:

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, $g \in L^1(\Omega)$ alors $f * g \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ et $(f * g)' = f' * g$.

Preuve: Soit $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ et $g \in L^1(\Omega)$.

$$(f * g)'(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_{\Omega} f(x-y)g(y)dy \right).$$

On applique le théorème de dérivation sous l'intégrale à $h: (x,y) \mapsto f(x-y)g(y)$.

→ Pour presque tout $x \in \Omega$, $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable car $|f| \leq \|f\|$ et $g \in L^1$.

→ Pour presque tout $y \in \Omega$, $x \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = f'(x-y)g(y)$ est $\mathcal{C}^1$.

→ Pour presque tout $x \in \Omega$, $\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) \right| \leq \mu(K) \|f'\|_{\infty} |g(y)|$ est majorée intégrable sur le support de g .

$$\text{Donc } (f * g)'(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_{\Omega} f(x-y)g(y)dy \right) = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} f(x-y)g(y)dy = \int_{\Omega} f'(x-y)g(y)dy = (f' * g)(x).$$

Proposition:

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ alors $f_n * f \rightarrow f$ uniformément sur tout compact.

Preuve:

Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ compact.

Soit $\varepsilon > 0$.

Soit $\delta > 0$ tel que $|f(x-y) - f(x)| \leq \varepsilon$ $\forall x \in K, \forall y \in B(0, \delta)$.

Alors, pour $x \in K$, on a:

$$|f_n * f - f|(x) \leq \int_{B(0, \frac{1}{n})} |f(x-y) - f(x)| f_n(y) dy \quad \text{Bien défini car } f \text{ est continue sur } B(0, \frac{1}{n})$$

$$\leq \varepsilon \quad \text{lorsque } n > \frac{1}{\delta}$$

On peut dire que $\sup_{x \in K} |f_n * f - f| \rightarrow 0$ et on a le résultat.

Théorème:

Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$. Alors $f_n * f \rightarrow f$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Preuve:

Soit $\varepsilon > 0$.

Par densité de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, on pose $f_1 \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^n)$ telle que:

$$\|f_1 - f\|_p \leq \varepsilon.$$

Par la proposition précédente $f_n * f_1 \rightarrow f_1$ uniformément sur tout compact.

On $\text{supp}(f_n * f_1) \subset B(0, \frac{1}{n}) + \text{supp}(f_1) \subset K$ compact.

$$\|g_n \times g_n - f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} |g_n \times g_n - f| dx$$

$$\leq \mu(n)^{\frac{1}{p}} \|g_n \times g_n - f\|_2$$

$\exists 3 \in$ pour $n \geq N$. d'où la nullité.

Conclaine: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert geom.
 $L^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < \infty$

Preuve:
Soit $f \in L^1(\Omega)$.

Sent 5:50

par densité de $\mathcal{C}_c(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$, il existe $f_n \in \mathcal{C}_c(\Omega)$ tq

$$\|f_n - \beta\|_p \leq \varepsilon$$

6. prolonge f_1 sur $\mathbb{R}$ en $\tilde{f}_1 = f_1 \cdot 1_{\mathbb{R}}$. Il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N$

$$\text{Also } \|p_n \bar{f} - \bar{f}\|_p \leq \varepsilon$$

D'another part, $\text{supp}(g_n \circ f_1) \subset \overline{B(0, \frac{1}{n})} + \underbrace{\text{supp} f_1}_{\text{Compact inclusion in } \Omega} \subset \Omega$ pour n assez grand.

Alors $(f_n \times \bar{f}_n|_{\Omega})_{n \geq 1}$ est une suite de fonction $\mathcal{C}^0(\Omega)$ pour n assez grand
qui vérifie $\forall n \geq N, \|f_n \times \bar{f}_n|_{\Omega} - f_n\|_p \leq \varepsilon$

$$\begin{aligned} D'_{\text{oi}} \quad \|f_n * \tilde{f}_1\|_2 - \|f\|_p &\leq \|f_n * \tilde{f}_1\|_2 - \|f_1\|_p + \|f_1 - f\|_p \\ &\leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

D'oi le résultat

Proposição: $(\mathbb{N}, B(\mathbb{N}), n)$, d. men. de Lebesgue:

(i) $\ell^p_c(\mathbb{N})$ est dense dans L^p pour $1 \leq p < +\infty$;
(ii) $\ell^\infty_c(\mathbb{N})$ est dense dans L^p pour $1 \leq p < +\infty$.

Result:

(i) Il suffit de voir que $\mathcal{Z}_n(N)$ est dense dans $\mathcal{Z}_n(\mathbb{R}^n)$ pour les n positives.

Pour l'inégalité de l'intégrale, il suffit d'approcher f_A pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ de mesure finie.

La mesure de Lebesgue est localement négative, $\lambda(A) = \inf\{\lambda(O) \mid O \supset A \text{ ouvert}\}$.

et si suppose et $\| \hat{\Omega}_m - \hat{A} \|_p \leq \| \hat{\Omega}_m - \hat{A} \|_p + \| \hat{A} - \hat{A} \|_p$
 $\leq \| \hat{\Omega}_m - \hat{A} \|_p + \| \hat{A} - \hat{A} \|_p = 0$

Tout ouvert borné Ω de $\mathbb{R}$ étant réunion dénombrable d'intervalles ouverts, 2 à 2 disjoints i.e.: $\Omega = \sum_{k=1}^{+\infty} I_k = \lim_n \bigcup_{k=1}^n I_k$.
(bonheur)

(ii) Par (i), il suffit d'appréhender $f \in \mathcal{L}^p$ pour $I = [a, b]$ un intervalle borné par $(f) \in \mathcal{L}^p(I)$.

$$\text{On pose, } \chi_{I_n}(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}] \\ \text{affine sur } [a, a + \frac{1}{n}] \cup [b - \frac{1}{n}, b] \\ 0 & \text{si } x \notin [a, b] \end{cases} \quad \text{et ok!}$$

Proposition:
L'ensemble $\{f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d), g \in \mathcal{L}^q(\mathbb{R}^d) \mid f * g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d) \text{ et } \|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1\}$

Preuve: $\Rightarrow$ Supp f, g positive. Soit $x \in \mathbb{R}^d$.

$$\begin{aligned} |f * g(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g(y) dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) g(y)| dy \end{aligned}$$

On considère la mesure $g(y) dy$
et on applique Hölder à $f \in \mathcal{L}^p$
et $1 \in \mathcal{L}^q(g)$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|^p g(y) dy \right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^d} g(y) dy \right)^{1/q}$$

$$\text{Donc } |f * g(x)|^p \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|^p g(y) dy \right) \left(\int_{\mathbb{R}^d} g(y) dy \right)^{p-1}$$

$$\begin{aligned} \text{Mais } \int_{\mathbb{R}^d} |f * g(x)|^p dx &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y)|^p g(y) dy dx \left(\int_{\mathbb{R}^d} g(y) dy \right)^{p-1} \\ &\leq \|f\|_p^p \|g\|_1^p \end{aligned}$$

$$\text{On a donc } \|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1 \quad \text{et } \cdot \text{ est } \cdot^{1/p}$$

$$\text{Donc } f * g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d) \text{ et } \|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1.$$

$\Rightarrow$ Cas général, on applique le cas positif à $|f|$ et $|g|$ $\in \mathcal{L}^p$

$$\text{On a } \| |f| * |g| \|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$$

On $|f * g|(x) = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-y) g(y)| dy$ est finie pp donc $f * g(x)$ existe pp
et $|f * g(x)| \leq |f * |g|| (x)$ donc $f * g \in \mathcal{L}^p$ et $\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1$. $\square$