

Localisation des valeurs propres [FRA-A2] p. 72.

Recarages: 144, 150, 153

Source: FRANCINO, GIANELLA, NICOLAS: Exercices de Mathématiques - Algèbre 2.

Lemme (d'HADAMARD):

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à diagonale dominante. On note pour $i=1, \dots, n$
 $R_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$. Alors A est inversible.

Preuve:

Par contraposition, on suppose A non inversible.

Il existe donc $X = (x_1, \dots, x_n)$ non nul tq $AX = 0$.

Alors $\forall i \leq n, \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = 0$.

D'où, pour $i \in \{1, \dots, n\}$ fixé on a :

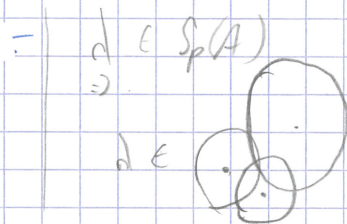
$$|a_{ii} x_i| = \left| \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| |x_j| \leq R_i \max_{j \in \{1, \dots, n\}} |x_j| = \|x\|_\infty$$

Soit $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tq $\|x\|_\infty = |x_{i_0}| > 0$, alors :

$|a_{i_0 i_0}| |x_{i_0}| \leq R_{i_0} |x_{i_0}|$ puis $|a_{i_0 i_0}| \leq R_{i_0}$ donc A n'est pas à diag. dominante. □

Théorème (des disques de Gerschgorin):

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Alors $\text{Sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^n \mathcal{D}(a_{ii}, R_i)$.



Preuve:

Soit $\lambda \in \text{Sp}(A)$.

$\lambda I_n - A$ n'est pas inversible donc $\lambda I_n - A$ n'est pas à diagonale dominante.

Par le lemme d'Hadamard, il existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tq
 $|\lambda - a_{ii}| = |(\lambda I_n - A)_{ii}| \leq R_i$ i.e. $\lambda \in \mathcal{D}(a_{ii}, R_i)$ □

Rq: Si l'on applique ce résultat à une matrice compagnon, on obtient des infos sur les racines du pol. associé.

Application:

Localisation des racines d'un polynôme (complexes).

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n .

$$P(X) = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0 \quad \text{et } a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}, \quad a_n \neq 0$$

On peut plutôt $\rightarrow$ Quitte à multiplier P par a_n^{-1} , on considère P unitaire.

regardes les racines de $a_n^{-1}P$ qui sont les mêmes. $\rightarrow$ Il s'agit que $a_n P$ est le polynôme caractéristique de la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -a_n^{-1}a_0 \\ 1 & \dots & 0 & -a_n^{-1}a_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & -a_n^{-1}a_{n-1} \end{pmatrix}$

les mêmes.

On note $R_P \subset \mathbb{C}$ l'ensemble des racines de P et on a:

$$R_P \subset B(0, |a_n^{-1}a_0|) \cup \bigcup_{i=1}^{n-2} B(0, 1 + |a_n^{-1}a_i|) \cup B(a_n^{-1}a_{n-1}, 1)$$

Ceci nous donne une majoration des racines en fonction des racines d'un polynôme en fonction de ses coefficients.

En effet, $R_P \subset B(0, \pi)$ avec $\pi = \max(|a_0|, |a_1|+1, \dots, |a_{n-2}|+1, |a_{n-1}|+1)$