

Théorèmes de points fixes.

[QUÉ] p188 / [GOU] p34
Topologie 6^o ad / Analyse 3^o ad

Récapitulons: 226.

[QUÉ]

Thm (point fixe de Picard):

X complet. $k \in [0, 1[$. $f: X \rightarrow X$ k -contractante.

Alors: (i) f admet un unique pt fixe a ;

(ii) Pour tout $x_0 \in X$, (x_n) définie par x_0 et $\forall n \in \mathbb{N}$
 $x_{n+1} = f(x_n)$, la suite converge vers a .

Preuve:

Unicité: Soient $u, v \in X$ deux pts fixes de f .

Alors $d(f(u), f(v)) = d(u, v) \leq k d(u, v)$ donc $d(u, v) = 0$
et nécessairement $u = v$.

Existence et caractérisation: Soit $x_0 \in X$ et (x_n) de l'énoncé.

Puisque f est k -contractante, par définition de (x_n) et par
récurrence, on a $\forall n \in \mathbb{N}$ $d(x_{n+1}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0)$ (*)

D'autre part, la série géométrique $\sum k^n$ converge car $k < 1$
donc (x_n) est de Cauchy dans X .

Il suit que (x_n) converge vers $a \in X$.

Finalement, f étant continue, le passage à la limite dans
l'égalité $f(x_n) = x_{n+1}$ donne $f(a) = a$. D'où l'existence
et la caractérisation.

De plus, pour tout $m \leq p \in \mathbb{N}$, on a par (*) et inégalité

triangulaire: $d(x_m, x_p) \leq \sum_{j=m}^{p-1} d(x_{j+1}, x_j) \leq \sum_{j=m}^{+\infty} k^j d(x_1, x_0) \leq \frac{k^m}{1-k} d(x_1, x_0)$

Enfin, en passant à la limite en p vers $+\infty$, on a:

$$d(x_m, a) \leq \frac{k^m}{1-k} d(x_1, x_0).$$

[600] Thm: Soit (E, d) compact. Soit $f: E \rightarrow E$ tq $\forall x \neq y, d(f(x), f(y)) < d(x, y)$.

Alors: (i) f admet un unique pt fixe $\alpha \in E$;

(ii) Pour tout $x_0 \in E$, $(x_n)_n$ définie par x_0 et $\forall n \in \mathbb{N} x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers α .

Preuve:

"(i)": L'application $x \mapsto d(x, f(x))$ est continue sur un compact donc bornée et atteint ses bornes.

Donc il existe $\alpha \in E$ tq $d(\alpha, f(\alpha)) = \inf_{x \in E} d(x, f(x))$.

Si $\alpha \neq f(\alpha)$, on a : $d(f(\alpha), f(f(\alpha))) < d(\alpha, f(\alpha))$ ce qui est absurde donc $\alpha = f(\alpha)$ est un pt fixe, unique par construction car si β est un ^{autre} pt fixe,

$d(f(\alpha), f(\beta)) = d(\alpha, \beta) < d(\alpha, \beta)$, ce qui est absurde.

"(ii)": Soit $x_0 \in E$ et (x_n) définie dans l'énoncé.

Mq (x_n) CV vers α .

On pose $\forall n$ $u_n = d(\alpha, x_n)$.

S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $u_{n_0} = 0$ alors $\forall n (u_n)_{n \geq n_0}$ est nulle et (x_n) CV vers α .

Si non, par construction, (u_n) décroît strictement et est minorée par 0 donc (u_n) converge vers $l \geq 0$.

Mq $l = 0$: On suppose, en vue d'une contradiction, que $l > 0$. Par compacité de E , il existe $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers $\beta \in E$.

Alors, on a $d(\alpha, f(x_{\varphi(n)})) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} d(\alpha, \beta) = l$ et par continuité de f , on a $d(\alpha, f(x_{\varphi(n)})) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} d(\alpha, f(\beta))$

Ceci étant absurde puisque $d(\alpha, f(\beta)) = d(f(\alpha), f(\beta)) < d(\alpha, \beta) = l$ et $\forall n$ $d(\alpha, f(x_{\varphi(n)})) = d(\alpha, x_{\varphi(n)+1}) \geq l$. Donc $l = 0$ et (x_n) CV vers α .