9 Formule d'inversion de Fourier dans $\mathcal{S}$

ref : Stein-Shakarchi ou Zuily

THÉORÈME 9.1 *On définit la transformée de Fourier par* $\mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2i\pi x\xi}\mathrm{d}\xi$.
Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *alors* $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

On a la formule d'inversion $\hat{\hat{f}} = \check{f}$, *donc la transformée de Fourier est un automorphisme de* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

PREUVE.
Transformée de Fourier d'une gaussienne :
Calculons la transformée de Fourier d'une gaussienne : $G_\delta(x) = e^{-\pi\delta x^2}$.

$$K_\delta(\xi) := \mathcal{F}(G_\delta)(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi\delta x^2 - 2i\pi x\xi}\mathrm{d}x$$

On peut dériver sous le signe intégral car G_δ est dans $\mathcal{S}$, donc intégrable sur $\mathcal{R}$ contre tout polynôme. Dérivons :

$$K'_\delta(\xi) = \int_{\mathbb{R}} (-2i\pi x)e^{-\pi\delta x^2} e^{-2i\pi x\xi}\mathrm{d}x$$

Puis, intégrons par partie :

$$K'_\delta(\xi) = \frac{i}{\delta}[e^{-\pi\delta x^2} e^{-2i\pi x\xi}]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{2\pi\xi}{\delta}\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi\delta x^2} e^{-2i\pi x\xi}\mathrm{d}x = -\frac{2\pi\xi}{\delta}K_\delta(\xi)$$

K_δ vérifie donc une équation différentielle d'ordre 1, donc on peut expliciter la solution :

$$K_\delta(\xi) = K_\delta(0)e^{-\frac{\pi x^2}{\delta}}$$

La constante $K_\delta(0)$ est une intégrale de Gauss, que l'on peut calculer en passant en coordonnées polaires, on trouve :

$$K_\delta(0) = \frac{1}{\sqrt{\delta}}$$

Utilisation de la gaussienne :
En utilisant Fubini, on montre la formule de multiplication :

$$\int G_\delta \hat{f} = \int K_\delta f$$

Il reste à passer à la limite quand δ tend vers 0. Le terme de gauche ne pose pas de problème, il y a convergence simple vers $\hat{f}$ est dominée par $\hat{f}$ car G_δ est une gaussienne qui s'étale.
Pour le terme de droite on fait un changement d'échelle :

$$\int K_\delta f = \int_{\mathbb{R}} f(x)\frac{1}{\sqrt{\delta}}e^{-\frac{\pi x^2}{\delta}}\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(y\sqrt{\delta})e^{-\pi y^2}\mathrm{d}y$$

Par convergence dominée (par f qui est intégrable), ce terme tend vers $f(0)$ quand $\delta \to 0$.
On obtient donc :

$$f(0) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\mathrm{d}\xi$$

Translation :

Ensuite, il reste à faire une translation et utiliser le comportement de Fourier vis-à-vis d'elle : On pose $F(y) = f(x+y)$, puis on a, comme F est dans $\mathcal{S}$:

$$f(x) = F(0) = \int_{\mathbb{R}} \hat{F}(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x+y)e^{-2i\pi y\xi}\mathrm{d}y\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)e^{2i\pi x\xi}\mathrm{d}\xi$$

par changement de variable $u = x + y$.

$\square$

Remarque : 1) il faut admettre les propriétés standards de $\mathcal{S}$ (invariance par translation..) et le fait que Fourier envoie $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$ (à mettre dans le plan).

2) On déduit facilement de ce résultat l'inversion de Fourier sur L^1 ainsi que le prolongement à L^2 (Plancherel). En effet, la formule de multiplication + la formule d'inversion montrent que $\mathcal{F}$ est une isométrie sur $\mathcal{S}$ muni de la norme L^2. On peut alors prolonger l'opérateur linéaire $\mathcal{F}$ à L^2 car celui-ci est complet et $\mathcal{S}$ y est dense. Cela reste une isométrie et la formule d'inversion $\hat{\hat{f}} = \check{f}$ est toujours valable. On a donc démontré Plancherel (pas si sûr ...). Pour la formule d'inversion sur L^1, cela provient de la continuité de $\mathcal{F}$ pour la norme L^1 sur $\mathcal{S}$ ainsi que la densité de $\mathcal{S}$ dans L^1.

Leçons concernées : méthodes de calcul d'intégrales, Intégrales à param, Fourier et convolution, Fourier dans $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$, $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$, (problème d'interversion de limites)