

Construction de l'exponentielle et de π .

Références: 228, 230, 243, 102

[ELI1] p251.

Théorème:

$\exp|_{\mathbb{R}}$ réalise une bijection dérivable strictement croissante
de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

Preuve:

Montrons d'abord que pour tout $x, y \in \mathbb{C}$, $e^{x+y} = e^x e^y$.

Soient $x, y \in \mathbb{C}$.

Les séries $\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{y^n}{n!}$ convergent absolument

Produit de Cauchy.

(Thm de Mertens)

sur $\mathbb{C}$, on a donc:

$$e^x e^y = \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

$$= \sum_{n \geq 0} \frac{(x+y)^n}{n!} = e^{x+y}$$

Il suit que pour $x \in \mathbb{R}$, $e^x = (e^{\frac{x}{2}})^2 > 0$

Pour $\text{Im}(\exp|_{\mathbb{R}}) \subset \mathbb{R}_+^*$

D'autre part, $\exp$ étant la somme d'une série de rayon de CV $+\infty$, elle est $\mathcal{C}^\infty$ et sa dérivée est la somme de la série des dérivées ^{termes à terme} partielles d'où :

$$\begin{aligned} \text{Pour } z \in \mathbb{C}, \exp'(z) &= \sum_{n \geq 0} \left(\frac{z^n}{n!} \right)' = \sum_{n \geq 1} \frac{n z^{n-1}}{n!} \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} = \exp(z) \end{aligned}$$

D'où $\exp' = \exp$ et, par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exp^{(n)} = \exp$.

Il suit alors, $\exp|_{\mathbb{R}} > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc $\exp|_{\mathbb{R}}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc injective sur $\mathbb{R}_+^*$.

Il suit que $\exp|_{\mathbb{R}}$ induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\exp|_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$

Montrons que $\exp_{\mathbb{R}}$ est surjective.

Pour cela, on applique le TVI en remarquant que $\forall x \geq 0$, $\exp_{\mathbb{R}}(x) \geq 2x + 1$ donc $\exp_{\mathbb{R}}(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$

et $\forall x$ $\exp_{\mathbb{R}}(x) = \frac{1}{\exp_{\mathbb{R}}(-x)}$ donc $\exp_{\mathbb{R}}(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$.

Finalement $\exp_{\mathbb{R}}$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^*$.

La stricte convexité résulte de la stricte positivité de $\exp''_{\mathbb{R}}$ sur $\mathbb{R}$.

Théorème:

$\left[\begin{array}{l} \exp \text{ est un morphisme de groupes continu et} \\ \text{surjectif de } (\mathbb{C}, +) \text{ sur } (\mathbb{C}^*, \times). \end{array} \right.$

Preuve:

• L'application $\exp$ est continue sur $\mathbb{C}$ comme somme d'une série de fonctions convergant absolument sur tout compact de $\mathbb{C}$.

• C'est un morphisme de groupe par l'identité $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$

• Ma $\exp$ est surjective.

Soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$.

$\Rightarrow$ Supposons d'abord $z_0 \notin \mathbb{R}$.

On considère $f: t \in [0,1] \mapsto (1-t) + tz_0$ le chemin joignant 1 à z_0 . f est $\mathcal{C}^1$ et ne s'annule pas car $z_0 \notin \mathbb{R}$.

On pose alors $g: t \in [0,1] \mapsto \int_0^t \frac{f'(x)}{f(x)} dx$. g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ car f'/f est continue.

Il suit que $f e^{-g}$ est $\mathcal{C}^1$ comme composée de fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

On $(f e^{-g})' = (f' - f \frac{f'}{f}) e^{-g} = 0$ donc $(f e^{-g})$ est cte sur $[0,1]$ avec $f(0) e^{-g(0)} = 1$.
Donc $f(1) e^{-g(1)} = 1$ puis $z_0 = e^{g(1)}$

$\Rightarrow$ Si $z_0 \in \mathbb{R}^*$, par ce qui précède, il existe $\theta \in \mathbb{C} / e^{\theta} = i^{-1} z_0$.
La bijectivité de $\exp_{\mathbb{R}}$, il existe x tq $e^x = -z_0$. On a alors $z_0 = i^2 (-z_0) = e^{2\theta} e^x = e^{x+2\theta}$.

