

# Indécomposabilité de la loi de Poisson.

[QUE<sup>2</sup>] p. 208  
p. 454

Recasages : 245, 264, 264, 243, ~~266~~

Théorème (Hadamard):

Soit  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ,  $f = u + iv$ .  
On note  $A(n) = \sup_{|z|=n} \operatorname{Re}(f(z))$ . p. 218

Alors pour  $n \geq 1$  et  $n > 0$ ,  $|a_n| \leq 2 \frac{A(n) - u(0)}{n^n}$ .

Preuve:

Soit  $\alpha > 0$ .  $\psi: \theta \mapsto \sum a_n z^n e^{in\theta}$   $\forall n \in \mathbb{N}$   $f(re^{i\theta})$

Coefficients  
de Fourier  
de  $\psi$

Pour  $n \geq 1$ , on a donc:

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \quad (1)$$

$$\text{et } 0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \quad (2)$$

Soit  $n \geq 1$ .

En conjuguant (1) et en normalisant avec (2), on obtient:

$$a_n r^n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (u(re^{i\theta}) - A(n)) e^{-in\theta} d\theta \quad \text{car } \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} d\theta = 0$$

D'autre part,  $|u(re^{i\theta}) - A(n)| = |A(n) - u(re^{i\theta})|$  donc:

$$|a_n| r^n \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |A(n) - u(re^{i\theta})| d\theta$$

$$\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} A(n) d\theta - 2 \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) d\theta}_{= u(0)} \quad \text{formule moyenne}$$

$$\leq 2(A(n) - u(0))$$

Où le résultat.

Théorème:

Soient  $X, Y$  deux v.g. ind. à val dans  $\mathbb{N}$  tq  $X+Y \equiv z$   
avec  $z \sim P(1)$ . Supp  $X, Y$  non nullen.  
 $X$  et  $Y$  suivent une loi de Poisson.

Preuve: On raisonne sur  $X$ , il en sera de même pour  $Y$ .

On considère les fonctions génératrices, pour  $|z| \leq 1$ :

$$\begin{aligned} \bullet f(z) &= G_X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n \\ \bullet g(z) &= G_Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n z^n \\ \bullet G_Z(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = e^{z-1} \end{aligned}$$

$X$  et  $Y$  étant ind.  $G_Z = G_{X+Y} = G_X G_Y = \beta \gamma$ .

Il suit que pour  $|z| \leq 1$  (a priori)  $f(z)g(z) = e^{\lambda(z-1)}$ .

C'est à dire:  $(\sum p_n z^n)(\sum q_n z^n) = e^{\lambda(z-1)} \quad (|z| \leq 1)$

On identifie les termes:

Donc  $p_0 q_0 = e^{-\lambda} > 0$  i.e.  $p_0 \neq 0, q_0 \neq 0$

$$\text{et } \sum_n e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = p_0 q_0 + \dots + p_0 q_n \geq p_0 q_0$$

Il suit que pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $p_n \leq \frac{1}{q_0} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$  donc  $f$  a un rayon de CV infini.

(Idem pour  $g$ )

On a donc  $\beta g|_{D(0,1)} = G_Z|_{D(0,1)}$ , par le principe du prolongement analytique, l'égalité tient sur  $\mathbb{C}$ .

Il reste à identifier  $f$ .

On a: Si  $|z| = r$ ,  $|f(z)| \leq f(|z|) = f(r) \leq C e^{\lambda(r-1)}$  avec  $C > 0$

D'autre part,  $f$  est entière sans zéros donc il existe  $F$  entière

tg  $f = e^F$ , notons  $F: z \mapsto \sum_{n \geq 0} a_n z^n$

On a  $\operatorname{Re}(F(z)) \leq \lambda|z| + \log C$  (quitte à supposer  $C \geq 1$ ).

Par le Théorème d'Hadamard, puisque  $A(r) \leq \lambda r + \log C$ , on a pour

$$n \geq 2: |a_n| \leq 2 \frac{\lambda n + \log C - \operatorname{Re}(F(0))}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Donc  $F: z \mapsto \alpha_1 z + \alpha_0$ .

Finalement,  $1 = f(1) = e^{\alpha_1} e^{\alpha_0}$  et, quitte à prendre  $\alpha_0 + 2ik\pi$ ,

on a  $\alpha_0 = -\alpha_1$  et  $f(z) = e^{\alpha_1(z-1)}$ .

Il reste à montrer  $\alpha_1 > 0$ .

On a:  $f(1) = E[X] > 0$  donc  $X \sim \mathcal{P}(\alpha_1)$ .

Si  $X=0$   
→