

Cholesky, QR et Hadamard.

Recherches: 157, 168, 148, 191

[X-ENS] p 131

Théorème (de Cholesky):

Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
Il existe une unique matrice R triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs (g) $A = {}^t R R$.

Preuve: Existence:

Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

On considère $\varphi: (X, Y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto {}^t X A Y$.

φ est un produit scalaire de matrice A dans la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$.

Par le procédé de Gram-Schmidt, il existe $(e_1, \dots, e_n)$ une base

ON pour φ telle que $\text{Mat}_{(e_1, \dots, e_n)}(\varphi) = \text{Id}_n$.

On considère alors P la matrice de passage de $(e_1, \dots, e_n)$ à $(e_1, \dots, e_n)$. Il suit que $A = {}^t P \text{Id}_n P = {}^t P P$.

De plus, P est triangulaire supérieure de coefficients diagonaux $P(e_i, e_i) > 0$ par G-S.

$R = P$ convient.

□

On a $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$
l'ensemble
des telles matrices.

Unicité: Soit $C \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ triang. sup. à coeff diagonaux > 0 telle que ${}^t C C = A$.

On a alors ${}^t C C = {}^t R R$ puis $({}^t R)^{-1} {}^t C = R C^{-1} = D$ qui est diagonale puisqu'à la fois triangulaire supérieure et inférieure.

D'autre part, ${}^t D = {}^t ({}^t R)^{-1} {}^t C = C R^{-1} = D^{-1}$ donc D est orthogonale.

~~$D = \text{Id}_n$ car D est orthogonale~~

Il suit que D s'écrit $\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_n \end{pmatrix}$ avec $\forall i, d_i^2 = 1$.

D étant à coefficients strictement positifs, $D = \text{Id}_n$ et $C = R$.

□

Théorème (décomp. QR):

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$.
 Il existe un unique couple (Q, R) avec $Q \in O_n(\mathbb{R})$ et R triang. supérieure à coeff. diag. $\rightarrow 0$ tq $A = QR$.

Preuve:

Existence:

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

Il suit que ${}^tAA \in \mathcal{L}_n^{++}(\mathbb{R})$.

tAA admet donc une décomposition de Cholesky ${}^tAA = {}^tRR$.

On pose alors $Q = AR^{-1}$ et on a $A = QR$ et:

$${}^tQQ = ({}^tAR^{-1})AR^{-1} = {}^tR^{-1}{}^tAA R^{-1} = {}^tR^{-1}{}^tRR R^{-1} = I_n.$$

D'où (Q, R) comme attendu.

Unicité: Soit (Q, R) comme défini dans le thm.

$$A = QR \text{ puis } {}^tAA = ({}^tQR)QR = {}^tR{}^tQQR = {}^tRR.$$

Par Cholesky, R est unique, il suit que Q est unique.

Théorème (inégalité d'Hadamard):

Soit $A \in \mathcal{L}_n^+(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$
 On a: $\det A \leq \prod_{i=1}^n a_{ii}$

Preuve:

Soit $A \in \mathcal{L}_n^+(\mathbb{R})$.

On considère $\varphi: (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto {}^tXAY$ tq la matrice de A dans la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ soit A .

φ est bilinéaire symétrique et positive car A l'est.

Il suit que $a_{ii} = \langle e_i, e_i \rangle \geq 0$ pour i allant de 1 à n .

$$\text{Si } A \notin \mathcal{L}_n^{++}(\mathbb{R}), 0 = \det A \leq \prod_{i=1}^n a_{ii}.$$

Supposons $A \in \mathcal{L}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Considérons sa décomposition de Cholesky $A = {}^tRR$, $R = (r_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$.

Il suit que $\det A = (\det R)^2 = \prod_{i=1}^n r_{ii}^2$. Or $a_{ii} = \sum_{k=1}^i r_{ki}^2 \geq r_{ii}^2$.

$$\text{D'où } \det A = \prod_{i=1}^n r_{ii}^2 \leq \prod_{i=1}^n a_{ii}.$$