

Sous-espaces totalement isotropes maximales. [GOU] p250

Recherches: 170, 171.

K un corps. E un K -ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $q \in \mathcal{Q}(E)$ non dégénérée.

Proposition:

Les SETiM associés à q ont tous la même dimension.

Preuve:

Soient F_1, F_2 deux sous-espaces totalement isotropes maximales.

Montrons que $\dim F_1 = \dim F_2$.

On pose $F = F_1 \cap F_2$ puis S_1, S_2 des sev.
avec: $\bullet S_1$ supplémentaire de F dans F_1 i.e.: $F_1 = F \oplus S_1$
 $\bullet S_2$ supplémentaire de F dans F_2 i.e.: $F_2 = F \oplus S_2$

Montrons que $S_1 \cap S_2^\perp = S_2 \cap S_1^\perp = \{0\}$.

Soit $x \in S_1 \cap S_2^\perp$. mg $x = 0$.

$\rightarrow x \in F_2^\perp$:

$F_2 = F \oplus S_2$ donc $F_2^\perp = F^\perp \cap S_2^\perp$

Or $x \in F^\perp$ car $x \in S_1 \subset F_1 \subset F_1^\perp \subset F^\perp$.
SETi $\uparrow$ $F \subset F_1$

Donc $x \in F_2^\perp$.

$\rightarrow x = 0$:

Puisque $x \in S_1 \subset F_1$, $q(x) = 0$.

Prenons $G = F_2 + \mathbb{K}x$.

Soit $z \in G$, $z = y + kx$, avec $y \in F_2$ et $k \in \mathbb{K}$.

Alors $q(z) = q(y + kx) = \underbrace{q(y)}_{=0} + k^2 \underbrace{q(x)}_{=0} + 2k \underbrace{q(z, y)}_{=0 \text{ car } x \in F_2^\perp}$

Donc G est un SETi et $G \supset F_2$

D'où $G = F_2$ car F_2 est minimal.
 Il suit que $Kx = \{0\}$ i.e. $x = 0$.

On a montré que $S_1 \cap S_2^+ = \{0\}$.
 Par un raisonnement symétrique, $S_2 \cap S_1^+ = \{0\}$.

Donc S_1 et S_2^+ sont en somme directe et il suit
 que $\dim S_1 + \dim S_2^+ \leq n$.

Car g est non dégénérée donc $\boxed{\dim S_2 + \dim S_2^+ = n}$

On a, en substituant:

$$\dim S_1 + n - \dim S_2 \leq n$$

$$\begin{array}{l} \text{Puis } \dim S_1 \leq \dim S_2 \\ \text{Symétriquement } \dim S_2 \leq \dim S_1 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \dim S_1 \leq \dim S_2 \\ \dim S_2 \leq \dim S_1 \end{array}} \right\} \dim S_1 = \dim S_2$$

$$\text{Puis } \underline{\dim F_1} = \dim F + \dim S_1 = \dim F + \dim S_2 = \underline{\dim F_2}.$$

Proposition: $K = \mathbb{R}$, $\text{sgn}(g) = (1, 1)$ alors l'indice de g est $\inf(1, 1)$ □

Preuve: Notons $k = \inf(1, 1)$. Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ base de E
 $\text{tg } \mathcal{M}_B^K(g) = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & -I_{n-k} \end{pmatrix}$.

On pose $F = \text{Vect}(e_1 + e_{n+1}, \dots, e_k + e_{n+k})$

On a, pour $i = 1, \dots, k$, $g(e_i + e_{n+i}) = g(e_i) + g(e_{n+i}) = 1 - 1 = 0$.

Donc d'autre part, les e_i sont deux à deux orthogonaux.

Enfin, $F \subset F^\perp$ i.e.: F est un SET.

Soit G un SET $\text{tg } G \supset F$.

Soit $x \in G$, x s'écrit dans B : $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$.

Il suit: $g(x) = \sum_{i=1}^1 d_i^2 e_i - \sum_{i=1+1}^m d_i^2 = 0$ car $x \in G$ un SET (*)

D'autre part, $G \subset F \subset F^\perp$ donc pour tout $i=1, \dots, k$,
on a: $G \subset F$

$$\psi(x, e_i + e_{1+i}) = \frac{1}{2} (g(x + e_i + e_{1+i}) - g(x) - g(e_i + e_{1+i}))$$

$= 0 \quad = 0$

$$\psi(x, e_i + e_{1+i}) = 0 = d_i - d_{1+i}$$

Donc $\forall i \in [1, k]$, $d_i = d_{1+i}$

On peut
sauter ça
en disant

qu'il reste
une somme de
carrés dans toutes
"autres" di sont nuls.

Il suit, par (*), que $\sum_{i=1}^k (d_i^2 - d_{1+i}^2) = 0$
 $\rightarrow$ si $k=1$, $0 = \sum_{i=1}^1 (d_i^2 - d_{1+i}^2) - \sum_{i=2, 1+1}^m d_i^2 = 0$ d'où $\forall i \in [2, m]$

$$d_i = 0$$

$\rightarrow$ si $k=t$, $0 = \sum_{i=1}^t (d_i^2 - d_{1+i}^2) + \sum_{i=t+1}^m d_i^2 = 0$ d'où $\forall i \in [t+1, m]$

$$d_i = 0$$

Par disjonction de cas, $x = \sum_{i=1}^k d_i (e_i + e_{1+i})$

D'où $x \in F$ puis $G = F$.

En somme, F est un SET IM.