

Théorème: $\exists \gamma \in \mathbb{R} \text{ tq } H_m = \ln(m) + \gamma + \frac{1}{2m} - \frac{1}{12m^2} + o\left(\frac{1}{m^2}\right)$

Lemme: Soit $\alpha > 1$. $\sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{m^{\alpha-1}}$

Preuve lemme: Comme $[x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{x^\alpha}]$ est décroissante, on passe par comparaison série-intégrale: $\forall k \geq 2$,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha} dx \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x^\alpha} dx \quad (\text{faire un graphique si besoin de s'en convaincre}) \text{ et } \forall 2 \leq m \leq N, \text{ on a } \int_m^{N+1} \frac{1}{x^\alpha} dx \leq \sum_{k=m}^N \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{m-1}^N \frac{1}{x^\alpha} dx.$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \right]_m^{N+1} \leq \sum_{k=m}^N \frac{1}{k^\alpha} \leq \left[\frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \right]_{m-1}^N \quad (\Rightarrow) \frac{1}{1-\alpha} \left((N+1)^{1-\alpha} - m^{1-\alpha} \right) \leq \sum_{k=m}^N \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{1-\alpha} \left(N^{1-\alpha} - (m-1)^{1-\alpha} \right) = \frac{1}{\alpha-1} \left(\frac{1}{(m-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{N^{\alpha-1}} \right).$$

Donc, $\left(\sum_{k=m}^N \frac{1}{k^\alpha} \right)_{m \in \mathbb{N}; +\infty}$ est donc cv car croissante et majorée par $\frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{(m-1)^{\alpha-1}}$.

Ainsi, $\frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{m^{\alpha-1}} \leq \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{(m-1)^{\alpha-1}}$ (on a fait $N \rightarrow +\infty$) et donc $\sum_{k=m}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{m^{\alpha-1}}$ (On a utilisé $(m-1)^{\alpha-1} \sim_{m \rightarrow +\infty} m^{\alpha-1}$)

Preuve Théorème: Comme $[x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{x}]$ est décroissante, on passe par comparaison série-intégrale: $\forall k \geq 2$,

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x} dx \text{ et } \forall m \geq 2, 1 + \int_2^{m+1} \frac{1}{x} dx \leq 1 + \sum_{k=2}^m \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^m \frac{1}{x} dx \quad (\Rightarrow) 1 - \ln(2) + \ln(m+1) \leq \sum_{k=2}^m \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(m).$$

Ainsi, $H_m \sim_{m \rightarrow +\infty} \ln(m)$. À présent, posons, $\forall m \geq 2$, $U_m = H_m - \ln(m)$ et $V_m = H_{m-1} - \ln(m)$. On a:

$$U_m - V_m = \frac{1}{m} > 0, \quad U_m - U_{m+1} = -\frac{1}{m+1} - \ln(m) + \ln(m+1) = -\frac{1}{m+1} + \ln\left(\frac{m+1}{m}\right) = -\frac{1}{m+1} + \ln\left(1 + \frac{1}{m}\right) > 0 \text{ car } \ln(1+x) \leq x \quad \forall x \in]-1; +\infty[\quad (\Rightarrow x = \ln(1+x) < 0)$$

$$V_{m+1} - V_m = \frac{1}{m} + \ln(m) - \ln(m+1) = \frac{1}{m} + \ln\left(\frac{m}{m+1}\right) = \frac{1}{m} - \ln\left(1 + \frac{1}{m}\right) > 0 \text{ de la même façon.}$$

Ainsi, $(U_m)_m$ et $(V_m)_m$ sont adjacentes et convergent vers $\gamma \in \mathbb{R}$. D'ailleurs, $V_m \nearrow$ donc $V_2 \leq \gamma$ et $V_2 = 1 - \ln(2) = 1 - \ln(1+1) > 0$. Donc, $\gamma \in \mathbb{R}^+$.

Posons alors, $\forall m \geq 2$, $t_m = U_m - \gamma = H_m - \ln(m) - \gamma$. On a: $t_m - t_{m-1} = \ln(m-1) - \ln(m) + \frac{1}{m} = \ln\left(1 - \frac{1}{m}\right) + \frac{1}{m} \stackrel{\text{DL de } \ln(1-x)}{\sim} -\frac{1}{m} - \frac{1}{2m^2} + o\left(\frac{1}{m^2}\right) + \frac{1}{m} \sim_{m \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2m^2}$

Donc, par le critère des séries de Riemann, la série de terme général $t_k - t_{k-1}$ cv et par le thm de sommation des équivalents, les

restes sont équivalents. Ainsi, par le lemme, on a: $\sum_{k=m+1}^{+\infty} t_k - t_{k-1} = -t_m \sim_{m \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2} \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim_{m \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2} \frac{1}{m}$, d'où $t_m \sim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{2m}$ et $H_m = \ln(m) + \gamma + \frac{1}{2m} + o\left(\frac{1}{m}\right)$.

Enfin, posons, $\forall m \geq 2$, $\omega_m = t_m - \frac{1}{2m}$ et de manière similaire:

$$\omega_m - \omega_{m-1} = \frac{1}{m} - \ln\left(1 - \frac{1}{m}\right) - \frac{1}{2m} + \frac{1}{2(m-1)} \stackrel{\text{DL de } \ln(1-x)}{\sim} \frac{1}{m} - \left(-\frac{1}{m} - \frac{1}{2m^2} - \frac{1}{3m^3} + \frac{1}{2m}\left(1 - \frac{1}{m}\right) - \frac{1}{2m}\right) + o\left(\frac{1}{m^2}\right) = -\frac{1}{2m^2} - \frac{1}{3m^3} + \frac{1}{2m}\left(1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} + o\left(\frac{1}{m^2}\right)\right) + o\left(\frac{1}{m^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2m^2} - \frac{1}{3m^3} + \frac{1}{2m} + \frac{1}{2m^2} + \frac{1}{2m^3} - \frac{1}{2m} + o\left(\frac{1}{m^2}\right) = \frac{1}{6m^3} + o\left(\frac{1}{m^3}\right) \text{ et } -\omega_m \sim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{6} \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \sim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{6} \frac{1}{2m^2}. \text{ Enfin, on a bien } H_m = \ln(m) + \gamma + \frac{1}{2m} + o\left(\frac{1}{m}\right).$$

Référence: L'oral à l'agrégation de mathématiques, Isemmam

Leçons: 224 - 230 - 223 Le Isemmam ne propose pas la leçon 223, mais le rapport du jury semble indiquer que ce dev conviendrait bien.

Remarques: - Dev peu complexe mais répétitif, imintéressant, presque inutile, calculatoire, très inesthétique. (Oui, je ne l'aime pas, vraiment on s'ennuie à le faire).

- IP Faut savoir montrer .

Prop: Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $b_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \sim b_n$. Si $\sum_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$, alors $R_n \sim S_n$ (les restes sont équivalents).
reste de $\sum a_k$ reste de $\sum b_k$

Preuve: $a_n \sim b_n$ donc $a_n = b_n + o(b_n) \Leftrightarrow a_n - b_n = o(b_n)$. Ainsi, soit $\varepsilon > 0 : \exists p \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq p, |a_n - b_n| \leq \varepsilon |b_n|$.

Donc, $\forall n \geq p, |R_n - S_n| = \left| \sum_{k=n}^{\infty} a_k - b_k \right| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |a_k - b_k| \leq \varepsilon \sum_{k=n}^{\infty} |b_k| = \varepsilon \sum_{k=n}^{\infty} \underbrace{b_k}_{>0} = \varepsilon S_n$.

Ainsi, $R_n - S_n = o(S_n) \Leftrightarrow R_n = S_n + o(S_n) \Leftrightarrow R_n \sim S_n$. $\square$

