

On note $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ et $(M_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$, $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$.

Théorème: Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A: \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ et $b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ 2 applications continues, $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Alors le problème de Cauchy (C): $\begin{cases} y' = A(t)y + b(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$

admet une unique solution définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Preuve. Étape 1: Reformulation du problème local

Soit $I = [a; b] \ni 0$ un segment d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$. On cherche une solution de (C) sur I . Pour ça, soit $F: (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mapsto A(t)x + b(t)$. On a

$[t \mapsto \|A(t)\|]$ continue sur I par composition et donc bornée, c'est-à-dire $\exists M > 0$ tel que $\forall t \in I, \|A(t)\| \leq M$. Ainsi, $\forall (x_1, x_2) \in (\mathbb{R}^n)^2, \forall t \in I$:

$\|F(t, x_1) - F(t, x_2)\| = \|A(t)(x_1 - x_2)\| \leq \|A(t)\| \|x_1 - x_2\| \leq M \|x_1 - x_2\|$. Ainsi, F est globalement lipschitzienne p/n à sa 2nd variable et uniformément
 [si: $x_1 = x_2$, ok. si $x_1 \neq x_2, \|x_1 - x_2\| \neq 0, \|A(t)(x_1 - x_2)\| = \|x_1 - x_2\| \frac{\|A(t)(x_1 - x_2)\|}{\|x_1 - x_2\|} \leq \|A(t)\| \|x_1 - x_2\|$]

p/n à sa variable de temps t . c'est-à-dire que la majoration ne dépend pas de t .

Soit $E = C^1(I, \mathbb{R}^n)$ et $F = C^0(I, \mathbb{R}^n)$, munis de $\|\cdot\|_\infty$. Soit $L: E \rightarrow E$ tq $\forall \varphi \in E, L(\varphi): t \in I \mapsto y_0 + \int_0^t F(s, \varphi(s)) ds$. Alors, par le **Théorème fondamental**

de l'analyse, $L: E \rightarrow F, \forall \varphi \in E, \forall t \in I, (L(\varphi))'(t) = F(t, \varphi(t)) = A(t)\varphi(t) + b(t)$ et $L(\varphi)(0) = y_0$. Finalement, on reformule notre problème ainsi:

$\begin{cases} \varphi \text{ solution de (C)} \\ \varphi \in F \end{cases} \stackrel{(\ast)}{\iff} \begin{cases} L(\varphi) = \varphi \\ \varphi \in E \end{cases}$. On a obtenu un problème de point fixe!

Assurez-vous de bien comprendre cette équivalence primordiale pour la preuve.

Étape 2: Application du théorème du point fixe de Picard

Montrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$ que $\forall (\varphi_1, \varphi_2) \in E^2, \forall t \in I$, on a: $\|L^p(\varphi_1)(t) - L^p(\varphi_2)(t)\| \leq \frac{\pi^p M^p}{p!} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty$. $\forall (\varphi_1, \varphi_2) \in E^2, \forall t \in I$,

- Si $p=1$, $\|L(\varphi_1)(t) - L(\varphi_2)(t)\| \leq \left| \int_0^t \|F(s, \varphi_1(s)) - F(s, \varphi_2(s))\| ds \right| \leq \pi \left| \int_0^t \|\varphi_1(s) - \varphi_2(s)\| ds \right| \leq \pi \|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty |t|$, ok. **Attention: t peut être négatif car $0 \in I$! D'où les valeurs absolues partout.**

- Supposons la propriété vraie pour $p \in \mathbb{N}^*$. Alors, $\|L^{p+1}(\varphi_1)(t) - L^{p+1}(\varphi_2)(t)\| \leq \left| \int_0^t \|F(s, L^p(\varphi_1)(s)) - F(s, L^p(\varphi_2)(s))\| ds \right| \leq \pi \left| \int_0^t \|L^p(\varphi_1)(s) - L^p(\varphi_2)(s)\| ds \right|$
 $\leq \frac{\pi^{p+1}}{p!} \left| \int_0^t |s|^p \|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty ds \right|$ par hypothèse de récurrence. Si $t \geq 0$: $\leq \frac{\pi^{p+1}}{(p+1)!} t^{p+1} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty$. Ok.

Si $t < 0$: $= \frac{\pi^{p+1}}{p!} \int_t^0 (-s)^p \|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty ds = \frac{\pi^{p+1}}{p!} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty \left[-\frac{(-s)^{p+1}}{p+1} \right]_t^0 = \frac{\pi^{p+1}}{(p+1)!} |t|^{p+1} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty$. Ok.

Donc, l'hypothèse de récurrence est vérifiée et on peut déduire que $\forall (\varphi_1, \varphi_2) \in E^2, \forall p \in \mathbb{N}^*, \|L^p(\varphi_1) - L^p(\varphi_2)\|_\infty \leq \frac{\pi^p (b-a)^p}{p!} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_\infty$. **Donc, $|t| \leq |b-a|$.**

Comme $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{\pi^p (b-a)^p}{p!} = 0$ (terme général d'une série exponentielle), $\exists N \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < \frac{\pi^N (b-a)^N}{N!} < 1$ et L^N est contractante sur $(E, \|\cdot\|_\infty)$ Banach.

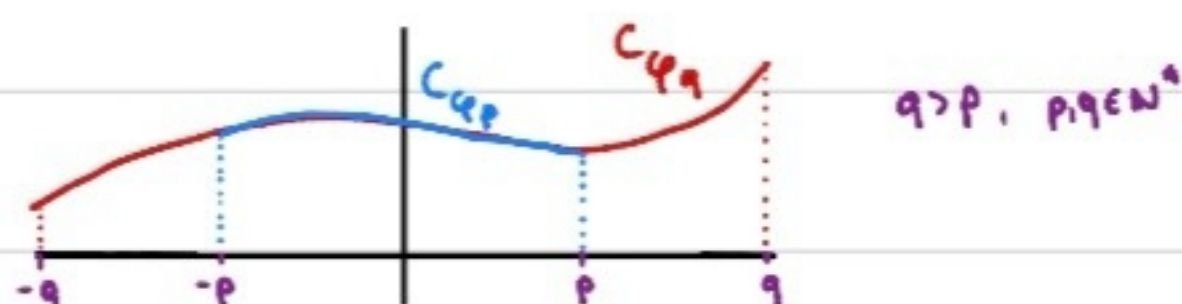
Ainsi, par le **thm du point fixe de Picard**, $\exists \varphi_0 \in E$ tel que $L^N(\varphi_0) = \varphi_0 \Rightarrow L^N(L(\varphi_0)) = L(\varphi_0) \Rightarrow L(\varphi_0) = \varphi_0$ et φ_0 est l'unique point fixe de L , un point fixe de L étant un point fixe de L^N . Ainsi, φ_0 est l'unique solution de (C) sur I .

Étape 3: Construction d'une solution globale

On prend $([-p, p])_{p \in \mathbb{N}^*}$ une suite de compacts de $\mathbb{R}$ tel que $\mathbb{R} = \bigcup_{p \in \mathbb{N}^*} [-p, p]$. On pose $\varphi_p \in C^1([-p, p], \mathbb{R})$ la solution de (C) sur $[-p, p]$ $\forall p \in \mathbb{N}^*$ et

$\varphi: t \in \mathbb{R} \mapsto \varphi_{p(t)}(t)$ avec $p(t) = \min\{p \in \mathbb{N}^* \mid t \in [-p, p]\}$. Le dessin suivant explique que par unicité de la solution de (C) sur les $[-p, p]$, φ est bien définie et

existe:



Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. Alors, $t \in [-p(t_0), p(t_0)] \subset [-p(t_0)-1, p(t_0)+1]$ donc φ dérivable en t_0 et $\varphi'(t_0) = \varphi'_{p(t_0)+1}(t_0) = A(t)\varphi_{p(t_0)+1}(t_0) + b(t_0) = A(t)\varphi(t_0) + b(t_0)$.

Enfin, $\varphi(0) = \varphi_1(0) = y_0$, donc φ est bien solution de (C) et est unique comme l'exprime notre dessin. $\square$ L'autre fonction solution coïnciderait avec φ sur

les compacts, donc serait égale à φ comme on vient de le voir.

Référence: Analyse pour l'agrégation, Bennis

Leçons 205 - 221. Bien que le rapport du jury en parle, quel point dans la preuve permet un recasage en 206?

. La leçon 220 est une leçon d'exemple et traite surtout des EDO non linéaires. Donc, pas de recasage en 220.

Remarques: - Dev sympathique et visuel. Étant long, on ne fait l'étape 3 qu'en commentant le dessin au tableau. D'ailleurs, la récurrence est

assez évidente, pas besoin de détailler comme je le fais ici, surtout si ça permet de prendre plus de temps sur l'étape 3 et les explications orales.

- Il faut savoir démontrer

Théorème: (du point fixe de Picard) Soit (X, d) un espace métrique complet et $f: X \rightarrow X$ contracte, c-à-d ℓ -lip avec $\ell \in]0, 1[$. Alors, f admet un unique point fixe.

Preuve: Unicité: Soient $x, y \in X$ tels que $f(x) = x$ et $f(y) = y$. Supposons $x \neq y$. Alors, $d(f(x), f(y)) < d(x, y) = d(f(x), f(y)) \rightarrow$ Absurde. Donc, $x = y$.

Existence: Soit $(x_n)_n \subset X$ définie par $x_{n+1} = f(x_n) \forall n \in \mathbb{N}$. Alors, $d(x_{n+1}, x_n) \leq k d(x_n, x_{n-1}) \leq \dots \leq k^n d(x_1, x_0)$. Donc, la série de terme général $d(x_1, x_0)$ est convergente et $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy. X étant complet, cette suite converge et on note x sa limite. Alors, f étant contractante, elle est continue et $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$. Enfin, $x_{n+1} = f(x_n)$ donc, par passage à la limite, $x = f(x)$. $\square$

