leçons : 204 : connexité
202 : Exemples de partie dense
207 : prolongement de fonctions
213 : Espaces de Hilbert
239 : Fc° définies par une intégrale dépendant d'un paramètre
234 : Espaces L^p, $1 \leq p \leq +\infty$
240 : Transformée de Fourier. Produit de convolution
245 : Fonctions holomorphes.

Base hilbertienne de polynômes

1

Références : Beck "objectif agreg"

Thm : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\rho : I \to]0,+\infty[$ une fonction mesurable (poids). Si il existe $a > 0$ tel que $\int_I e^{a|x|} \rho(x)\,dx < +\infty$, alors la famille de polynômes orthogonaux associée à ρ induit une base hilbertienne (par renormalisation) de $L^2(I,\rho)$.

preuve : On note (P_n) la famille de polynômes orthogonaux associée à ρ (renormalisée)

① $L^2(I,\rho) = \{ f : I \to \mathbb{R} \mid \int_I f^2 \rho < +\infty \}$ est un espace de Hilbert

donc (P_n) base hilbertienne $\iff \overline{\mathrm{vect}(P_n \mid n \in \mathbb{N})} = L^2(I,\rho)$

$$\iff \overline{\mathrm{vect}(x^n \mid n \in \mathbb{N})} = L^2(I,\rho)$$

$$\iff (\mathrm{vect}(x^n \mid n \in \mathbb{N}))^\perp = \{0\}$$

② Soit $f \in (\mathrm{vect}(x^n \mid n \in \mathbb{N}))^\perp$

On pose $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \mathbb{1}_I(x)\,\rho(x)\,f(x) \end{cases}$ $\boxed{\varphi_{|\mathbb{R}\setminus I} \equiv 0}$

$\forall x \in I \quad |\varphi(x)| \leq \underbrace{|\rho(x)|^{\frac{1}{2}}}_{\in L^2(I)} \underbrace{|f(x)||\rho(x)|^{\frac{1}{2}}}_{\in L^2(I)}$ donc $\underline{\varphi \in L^1(\mathbb{R})}$

On peut considérer sa transformée de Fourier

$$\hat{\varphi} : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ y \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-iyx} \varphi(x)\,dx \end{cases}$$

③ On pose $U_a = \{ z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Im}\, z| < \frac{a}{2} \}$ ouvert connexe de $\mathbb{C}$.

On prolonge $\hat{\varphi}$ en $\Psi : \begin{cases} U_a \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-izx} \varphi(x)\,dx \end{cases}$

MQ Ψ est bien définie et est holomorphe sur U_a puis que $\Psi \equiv 0$ sur U_a.

$\forall z \in U_a\ \forall x \in I \quad |e^{-izx}\varphi(x)| \leq e^{|\mathrm{Im}\, z||x|} |\rho(x)||f(x)| \leq \underbrace{|\rho(x)|^{\frac{1}{2}} e^{\frac{a}{2}|x|}}_{\substack{\in L^2(I) \\ \text{par hypothèse sur } \rho}} \underbrace{|\rho(x)|^{\frac{1}{2}} |f(x)|}_{\substack{\in L^2(I) \\ \text{car } f \in L^2(I,\rho)}} = O(x)$

On en déduit que

- $\forall z \in U_a \quad x \mapsto e^{-izx}\varphi(x)$ est mesurable intégrable sur $\mathbb{R}$ (Ψ bien définie)
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad z \mapsto e^{-izx}\varphi(x)$ est holomorphe sur U_a
- $\forall z \in U_a \ \forall x \in \mathbb{R} \quad |e^{-izx}\varphi(x)| \leq \tilde{\Theta}(x)$ (domination)

où $\tilde{\Theta}(x) = \begin{cases} \Theta(x) & \text{si } x \in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Par le théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre holomorphe :
Ψ est holomorphe sur U_a et $\forall n \in \mathbb{N} \ \forall z \in U_a \quad \Psi^{(n)}(z) = \int_{\mathbb{R}} (-ix)^n e^{-izx}\varphi(x)\,dx$

$z=0$: $\forall n \in \mathbb{N} \quad \Psi^{(n)}(0) = (-i)^n \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, x^n\, dx = (-1)^n \int_I x^n f(x)\, \rho(x)\, dx \underset{\uparrow}{=} 0$

$f \in (\mathrm{Vect}(x^n \mid n \in \mathbb{N}))^{\perp}$

Par le principe du prolongement analytique : $\Psi \equiv 0$ sur U_a (car U_a connexe)
On en déduit que $\hat{\varphi} \equiv 0$ sur $\mathbb{R}$, en particulier $\hat{\varphi} \in L^1(\mathbb{R})$ et par injectivité de la transformée de Fourier : $\varphi \equiv 0$ sur $\mathbb{R}$.
D'où $f = 0$ □

Si on est rapide (et en fonction de la leçon ...) on peut rajouter l'un des deux points suivants.

(i) preuve du prolongement analytique

(ii) contre-exemple sans l'hypothèse sur ρ :

$$I =]0,+\infty[\quad , \quad \rho(x) = x^{-\ln x} \quad , \quad f(x) = \sin(2\pi \ln x)$$

$$J_n = \int_I f(x)\, x^n \rho(x)\,dx = \int_I \sin(2\pi \ln x)\, x^n\, x^{-\ln x}\, dx \underset{\ln x = y}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi y)\, e^{ny} (e^y)^{-y} e^y\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi y)\, e^{(n+1)y - y^2}\, dy \underset{u = y - \frac{n+1}{2}}{=} C_n \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\sin(2\pi u)}_{\text{impaire}}\, \underbrace{e^{-u^2}}_{\text{paire}}\, du \quad \text{où } C_n \text{ est une constante}$$

$$= 0$$