

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Théorème 1 (Cauchy-Lipschitz). Soit $f: \Omega \rightarrow E$ une fonction localement lipschitzienne en sa variable d'état sur un ouvert Ω de $\mathbf{R} \times E$. Pour tout (t_0, y_0) de Ω il existe une unique solution maximale, définie sur un ouvert, au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Démonstration. Soit $C = I \times B$ un cylindre de sécurité sur lequel f est k -lipschitzienne avec $I = [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ et $B = \overline{B(y_0, r)}$. Quitte à restreindre C , α et r sont choisis strictement positifs tels que $\alpha < \min\left(\frac{1}{k}, \frac{r}{\|f\|}\right)$. Rappelons que l'espace $\mathcal{C}(I, B)$ est complet pour la topologie de la convergence uniforme. Posons alors l'application bien définie

$$\begin{aligned} \Phi: \mathcal{C}(I, B) &\rightarrow \mathcal{C}(I, B) \\ y &\mapsto \begin{pmatrix} \Phi y: I \rightarrow I \\ t \mapsto y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nous montrons que cette application est contractante. Pour y_1 et y_2 dans $\mathcal{C}(I, B)$ et t dans l'intervalle I ,

$$\begin{aligned} \|\Phi y_1(t) - \Phi y_2(t)\|_E &\leq \int_{t_0}^t \|f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))\|_E ds \\ &\leq k \int_{t_0}^t \|y_1(s) - y_2(s)\|_E ds \\ &\leq k |t - t_0| \|y_1 - y_2\|_\infty \\ &\leq k\alpha \|y_1 - y_2\|_\infty. \end{aligned}$$

Et donc $\|\Phi y_1 - \Phi y_2\|_\infty < k\alpha \|y_1 - y_2\|_\infty$. Or $k\alpha < 1$, ce qui montre le caractère contractant.

D'après le théorème de Banach-Picard, Φ admet un unique point fixe y vérifiant $\Phi y = y$. Ce point fixe vérifie alors la formulation intégrale du problème de Cauchy. Le couple (I, y) forme une solution.

Si désormais (I, y_I) et (J, y_J) sont deux solutions. Introduisons $A = \{t \in I \cap J \mid y_I(t) = y_J(t)\}$. Cet ensemble est *non vide* puisque contient t_0 , il est *fermé* en tant qu'image réciproque d'un fermé

et il est de plus *ouvert* : si t est dans $\mathcal{A}$, alors d'après ce qui précède, il existe une unique solution au problème de Cauchy définie au voisinage de t . Donc y_I et y_J coïncident sur un ouvert autour de t . Puisque $\mathcal{A}$ est un ouvert-fermé non vide dans un connexe, $\mathcal{A} = I \cap J$.

Si $\mathcal{S}$ désigne l'ensemble des couples solution, nous dénotons par Γ l'intervalle réunion des intervalles solutions

$$\Gamma = \bigcup_{(I, y_I) \in \mathcal{S}} I.$$

Le raisonnement par connexité nous assure que y_I ne dépend pas du choix de l'intervalle I . Posons alors, quelque soit (I, y_I) une solution, $y|_I = y_I$. Montrons que nous venons de construire la solution maximale (Γ, y) . Si $(\tilde{\Gamma}, \tilde{y})$ est une solution qui prolonge y , alors $\Gamma \subset \tilde{\Gamma}$ mais également $(\tilde{\Gamma}, \tilde{y}) \in \mathcal{S}$ donc $\tilde{\Gamma} \subset \Gamma$ et ainsi $\tilde{\Gamma} = \Gamma$. De plus, Γ est ouvert car s'il était fermé, par exemple à droite de la forme $\Gamma =]a, b]$, la solution y serait strictement prolongeable à droite par la solution au problème de Cauchy de donnée initiale $(b, y(b))$ et cela contredirait le caractère maximal. $\square$