

Thm: Soient $[a, b], \gamma$ un chemin fermé et $U = \mathbb{C} \setminus \text{im } \gamma$. Pour $z \in U$, on pose:

$$\text{ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2i\pi} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt$$

L'application $U \rightarrow \mathbb{C}$
 $z \mapsto \text{ind}_\gamma(z)$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, constante sur chaque composante connexe
de U , et nulle sur la composante non bornée de U .

Appli: $I = \int_\gamma \frac{dz}{z^2 + 3z + 1} = \frac{2i\pi}{5}$ par le thm des résidus, avec γ le cercle orienté positivement de centre 0 et de rayon 1.

RESUME

• $t \mapsto \frac{\varphi(t)}{\gamma(t) - z}$ de dérivée nulle + comp a et b

• Thm des résidus, pôles, $\text{res}(f, z_1) = \frac{1}{f'(z_1)}$

• $\text{im } \gamma$ compact donc min atteint de $|\gamma - z|$ et $|\xi - z|$
+ maj de $|\text{ind}_\gamma(z) - \text{ind}_\gamma(u)| \rightarrow$ continuité

• $|z| > \sup |\gamma(t)|$ pour z assez grand $\text{ind}_\gamma(z) < 1$
par majo similaire à •

Démon Thm:

Notons $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ les points d'une subdivision de $[a, b]$ telle que γ soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a_i, a_{i+1}]$, $0 \leq i \leq n-1$. Pour $t \in [a, b]$, posons:

$$\varphi(t) = \exp\left(\int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} ds\right)$$

Sur chaque segment $[a_i, a_{i+1}]$, on a, en dérivant φ :

$$\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} \Rightarrow \varphi'(t)(\gamma(t) - z) - \varphi(t)\gamma'(t) = 0$$

On en déduit que $\varphi(t)/(\gamma(t) - z)$ a une dérivée nulle sur $[a_i, a_{i+1}]$, donc constante sur cet intervalle, puis constante sur $[a, b]$. Comme $\gamma(a) = \gamma(b)$, on a alors:

$$\frac{\varphi(a)}{\gamma(a) - z} = \frac{\varphi(b)}{\gamma(b) - z} \Rightarrow 1 = \varphi(a) = \varphi(b)$$

$$\varphi(a) = \exp\left(\int_a^a \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} ds\right) = e^0 = 1$$

On sait que $e^x = 1$ si $x = 2i\pi\mathbb{Z}$. Comme $1 = \varphi(b) = \exp(2i\pi \text{ind}_\gamma(z))$, on a $\text{ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z}$.

• Soit $z, u \in U$. Comme $\text{im } \gamma$ est compact,

$$\forall \xi \in \text{im } \gamma, \exists d > 0, |\xi - z| \geq d \text{ et } |\xi - u| \geq d$$

On a donc

$$|\text{ind}_\gamma(z) - \text{ind}_\gamma(u)| \leq \frac{1}{2\pi d^2} |z - u| \text{long}(\gamma)$$

En effet:

$$|\text{ind}_\gamma(z) - \text{ind}_\gamma(u)| \leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - z} - \int_\gamma \frac{d\xi}{\xi - u} \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_\gamma \frac{(\xi - u) - (\xi - z)}{(\xi - z)(\xi - u)} d\xi \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi d^2} |z - u| \left| \int_\gamma d\xi \right| \leq \frac{1}{2\pi d^2} |z - u| \text{long}(\gamma)$$

Ainsi

$$\frac{|\text{ind}_\gamma(z) - \text{ind}_\gamma(u)|}{|z - u|} \leq \frac{\text{long}(\gamma)}{2\pi d^2} \xrightarrow[|z - u| \rightarrow 0]{d \rightarrow 0} 0$$

donc l'application $z \mapsto \text{ind}_\gamma(z)$ est continue sur U . Comme elle est à valeurs entières, elle est localement constante, donc constante sur chaque composante connexe de U .

• On se place sur la composante connexe non bornée de U , c'est à dire, on prend z tel que $|z| > \sup \{ |r(t)|; t \in [a, b] \}$. Il vient:

$$|\text{ind}_\gamma(z)| \leq \frac{\text{long}(\gamma)}{2\pi \inf \{ |z - r(t)|; t \in [a, b] \}}$$

Si z est assez grand, on a alors $\text{ind}_\gamma(z) = 0$ sur la composante connexe non bornée.

Application: D'après le thm des résidus

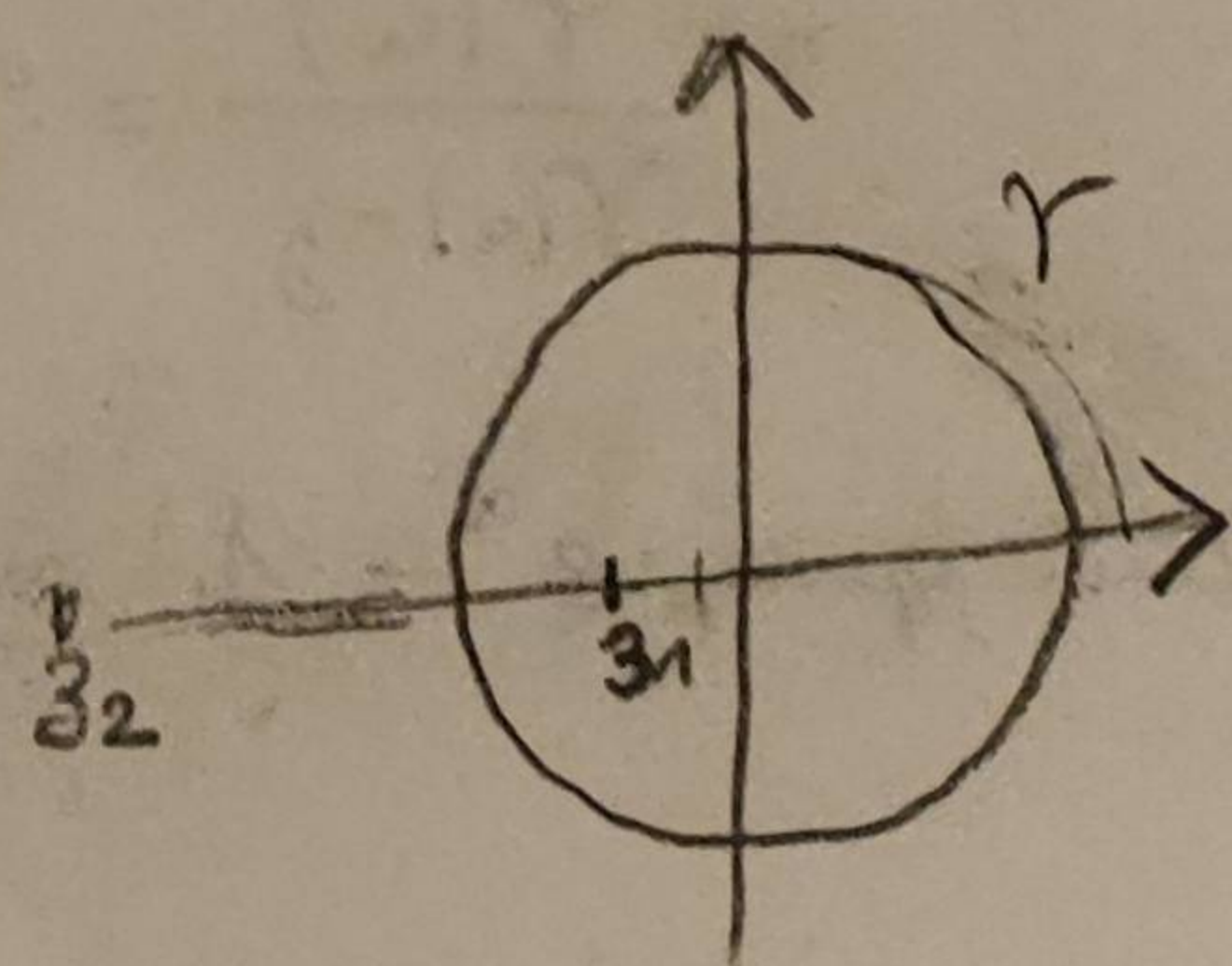
$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2 + 3z + 1} = 2i\pi [\text{ind}_\gamma(z_1) \text{Res}(f, z_1) + \text{ind}_\gamma(z_2) \text{Res}(f, z_2)]$$

avec $f(z) = \frac{1}{z^2 + 3z + 1}$; $z_1 = \frac{-3 + \sqrt{5}}{2}$; $z_2 = \frac{-3 - \sqrt{5}}{2}$

Évidemment z_1 est dans le cercle et z_2 à l'extérieur, on a donc

$$\text{ind}_\gamma(z_1) = 1 \text{ et } \text{ind}_\gamma(z_2) = 0.$$

Calculons le résidu.



Il y a 2 manières.
(Par la formule de Taylor)

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f, z_1) &= \lim_{z \rightarrow z_1} (z - z_1) f(z) \\ &= \frac{1}{(z_1 - z_2)} = \frac{1}{\frac{-3+\sqrt{5}}{2} - \frac{-3-\sqrt{5}}{2}} \\ &= \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\end{aligned}$$

$$\text{D'où } I = 2i\pi \operatorname{Res}(f, z_1) = \frac{2i\pi}{\sqrt{5}}$$

(où z_1 est un pôle d'ordre 1)

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}(f, z_1) &= \frac{1}{f'(z_1)} = \frac{1}{2 \times \frac{-3+\sqrt{5}}{2} + 3} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\end{aligned}$$