201
(229)
234

Inégalité de Young - Holder - Minkowski

- De l'intégration aux probas, Garet - Kurtzmann, p 209
- Eléments d'analyse réelle, Rombaldi, p 239 et 39

KUR 209

Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.
Pour $p \in [1, +\infty[$, on note $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ l'ensemble des applications mesurables de $(X, \mathcal{A}, \mu)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ tel que : $\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) < +\infty$

On pose $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}$

On note $\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ l'ensemble des applications mesurables de $(X, \mathcal{A}, \mu)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ tel que $\|f\|_\infty < +\infty$ où
$\|f\|_\infty = \inf \{ M \in \mathbb{R} ;\ \mu(\{x \in X ;\ |f(x)| > M\}) = 0 \}$
On a $|f| \leq \|f\|_\infty$ pp

Déf : Soit $p, q \in [1, +\infty]$. On dit que p et q sont des exposants conjugués s'ils vérifient :
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \left(\text{avec } \frac{1}{\infty} = 0\right)$$

ROM 239

Inégalité de Young : Soit $p, q > 0$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On a : $\forall u, v \in \mathbb{R}_+^*$:
$$u^{1/p} v^{1/q} \leq \frac{1}{p} u + \frac{1}{q} v$$

Preuve : Comme la fonction $\ln$ est concave sur $\mathbb{R}_+^*$, on a que pour tout $\lambda \in [0, 1]$, pour tous $u, v > 0$:
$$\ln(\lambda u + (1-\lambda) v) \geq \lambda \ln(u) + (1-\lambda) \ln(v)$$
$$= \ln(u^\lambda v^{(1-\lambda)})$$
On utilise alors la croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$:

⚠ erreur c'est $\mathbb{R}$ et pas $\mathbb{R}_+^*$

$\forall \lambda \in [0, 1]$, $\forall u, v \in \mathbb{R}_+^*$,
$$u^\lambda v^{(1-\lambda)} \leq \lambda u + (1-\lambda) v$$

Cette inégalité est aussi vraie pour $u=0$ ou $v=0$.
On prend alors $\lambda = \frac{1}{p}$ et $1-\lambda = \frac{1}{q}$.
D'où :
$$u^{1/p} v^{1/q} \leq \frac{1}{p} u + \frac{1}{q} v$$

En posant $a = u^{1/p}$ et $b = v^{1/q}$, cela s'écrit aussi
$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$$

KUR 209 <u>Inégalité de Holder</u> : Soit $p, q \in]1, +\infty[$ des exposants conjugués. Soit $f \in \mathcal{L}^p$ et $g \in \mathcal{L}^q$.
Alors $fg \in \mathcal{L}^1$ et :
$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

POM 39 <u>Preuve</u> : Si f est nulle presque-partout, l'inégalité est évidente. De même pour g.
On peut donc supposer $\|f\|_p > 0$ et $\|g\|_q > 0$.
On applique alors l'inégalité de Young à
$$u = \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} \quad \text{et} \quad v = \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}$$
pour tout $x \in X$. D'où :
$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \cdot \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q} \quad \forall x \in X$$
On intègre alors sur X :
$$\frac{1}{\|f\|_p} \frac{1}{\|g\|_q} \int_X |f(x)| |g(x)| \, d\mu(x) \leq \frac{1}{p} \frac{\|f\|_p^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{\|g\|_q^q}{\|g\|_q^q} = 1$$
Donc : $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$

KUR 210 <u>Remarque</u> : Si $p=1$ et $q=+\infty$, cela reste vrai car $|fg| \leq |f| \, \|g\|_\infty$ donc en intégrant,
$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_1 \, \|g\|_\infty$$

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \qquad q + p = pq \qquad p = \frac{q}{q-1} \qquad q = \frac{p}{p-1}$

$(p-1)q = p \qquad \frac{p}{q} = p-1$

KVR 211 Inégalité de Minkowski : Soit $p \in [1, +\infty]$. Soit $f, g \in \mathcal{L}^p$. Alors :

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Preuve : • Si $p = 1$, c'est une conséquence immédiate de l'inégalité triangulaire sur $\mathbb{R}$ et de la linéarité de l'intégrale.

• Si $p = +\infty$, alors $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ pp et $|g(x)| \leq \|g\|_\infty$ pp donc $|f+g| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ pp donc $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

• Soit $p \in]1, +\infty[$ et q son exposant conjugué. Comme précédemment, on peut supposer que f et g ne sont pas nulles presque-partout. On a alors :

$$\|f+g\|_p^p = \int_X |f(x)+g(x)|^p \, d\mu(x)$$

$$= \int_X |f(x)+g(x)| \cdot |f(x)+g(x)|^{p-1} \, d\mu(x)$$

$$\leq \int_X |f(x)| \cdot |f(x)+g(x)|^{p-1} \, d\mu(x)$$

$$+ \int_X |g(x)| \cdot |f(x)+g(x)|^{p-1} \, d\mu(x) \quad \text{par I-T}$$

$$\leq \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{1/p} \cdot \left(\int_X |f(x)+g(x)|^{(p-1)q} \, d\mu(x)\right)^{1/q}$$

$$+ \left(\int_X |g(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{1/p} \cdot \left(\int_X |f(x)+g(x)|^{(p-1)q}\right)^{1/q}$$

d'après l'inégalité de Hölder

$$\leq \|f\|_p \cdot \|f+g\|_p^{p/q} + \|g\|_p \cdot \|f+g\|^{p/q}$$

$$\leq \left(\|f\|_p + \|g\|_p\right) \cdot \|f+g\|_p^{p-1}$$

Or comme $\left(\frac{|f|+|g|}{2}\right)^p \leq \frac{|f|^p+|g|^p}{2}$ par convexité de la fonction $x \mapsto x^p$, on a donc que $\int_X |f(x)+g(x)|^p \, d\mu(x) < +\infty$ étant donné que $f, g \in \mathcal{L}^p$.

On peut donc diviser par $\|f+g\|_p^{p-1}$ pour trouver $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

KUR 212 <u>Corollaire</u> : Il est alors immédiat que $\|\cdot\|_p$ définit une semi-norme sur $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, l'inégalité triangulaire étant obtenue grâce à l'inégalité de Minkowski.

Ce n'est en revanche pas une norme sur $\mathcal{L}^p$ car par exemple $\|\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}\|_p = 0$ car $\mathbb{Q}$ dénombrable mais $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \neq 0$

C'est pour cette raison qu'on introduit $L^p = \mathcal{L}^p/\sim$ où $\sim$ est la relation d'équivalence $f \sim g \iff f = g$ μ-pp

<u>Remarques</u> :

KUR 212 ∅ 1) Soit μ mesure finie. Soit $1 \leq p \leq r \leq +\infty$.

Alors $L^r \subset L^p$. Soit $f \in L^r$.

Si $r < +\infty$, d'après l'inégalité de Hölder :

$$\|f\|_p^p = \int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) \leq \left(\int_X |f(x)|^{p\frac{r}{p}}\right)^{p/r} \cdot \left(\int_X |1|^{1-\frac{r}{p}}\right)^{p/p-r}$$

$$\leq \|f\|_r^p \cdot \mu(X)^{p/p-r}$$

donc : $\|f\|_p \leq \|f\|_r \cdot \mu(X)^{1/p-r} < +\infty$

Et si $r = +\infty$, $|f|^p \leq \|f\|_\infty^p$ donc

$\|f\|_p^p \leq \|f\|_\infty^p \, \mu(X) < +\infty$.

Cela est faux si μ n'est pas finie : si $\mu = \lambda$, alors $1 \in L^\infty$ mais $1 \notin L^p$ pour $1 \leq p < +\infty$