

Polynômes de Bernoulli
et fonction zêta

- Carnet de voyage en
Analyse, Caldero, p 107

CAL 2
107

Prop. Il existe une unique suite de polynômes à coefficients réels $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tel que $B_0 = 1$, $B_n' = n B_{n-1}$ pour $n \geq 1$ et $\int_0^1 B_n(t) dt = 0$ pour $n \geq 1$.
Pour $n \geq 1$, on a $B_n(0) = B_n(1)$.

Preuve: on montre l'existence et l'unicité par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- $B_0 = 1$

- On suppose que le polynôme B_{n-1} est défini de façon unique.

Alors la condition $P' = n B_{n-1}$ définit une famille de polynômes $P = P_n + h$ où h est une constante et un unique polynôme P_n qui est la primitive de $n B_{n-1}$ qui s'annule en 0.

On en a que $\int_0^1 P(t) dt = 0$ donc

$$h = - \int_0^1 P_n(t) dt$$

~~$$\text{On a } P_n(x) = \int_0^x n B_{n-1}(t) dt$$~~

~~$$\text{donc } h = - \int_0^1 \int_0^t n B_{n-1}(u) du dt$$~~

~~$$= - \int_0^1 n \int_0^1 B_{n-1}(u) du dt$$~~

Comme P_n est unique, h est aussi unique.

On en déduit l'existence et l'unicité de B_n .

On calcule les premiers termes:

- $B_0 = 1$

- $B_1'(t) = 1$, $B_0(t) = 1$

donc $B_1(t) = t + b_1$ avec $\int_0^1 (t + b_1) dt = 0$

donc $b_1 = - \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1 = - \frac{1}{2}$

donc $B_1(t) = t - \frac{1}{2}$

pourquoi $= 0$
dans le livre?
C'est une erreur

• $B_1'(t) = 2t - 1$ donc $B_1(t) = t^2 - t + b_2$
avec $b_2 = - \int_0^1 t^2 - t \, dt = - \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{6}$

Donc $B_1(t) = t^2 - t + \frac{1}{6}$

• $B_2'(t) = 3t^2 - 3t + 1$ donc $B_2(t) = t^3 - \frac{3t^2}{2} + \frac{t}{2} + b_3$
avec $b_3 = - \left[\frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{2} + \frac{t^2}{4} \right]_0^1 = - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = 0$

donc $B_2(t) = t^3 - \frac{3t^2}{2} + \frac{t}{2}$

Soit $n \geq 2$, on a :

$B_n(1) - B_n(0) = \int_0^1 B_n'(t) \, dt = n \cdot \int_0^1 B_{n-1}'(t) \, dt = 0$
par hypothèse et en a bien $n-1 \geq 1$.

Prop Soit $n \geq 1$. Soit f_n la fonction périodique de période 1 telle que $f_n(t) = B_n(t)$ pour $t \in]0; 1]$. Alors f_n est continue sur $\mathbb{R}$ et ses coeff de Fourier sont : $c_0(f_n) = 0$ et $c_p(f_n) = \frac{1}{(2+p\pi)^n}$ pour $p \neq 0$.

À continuer

sur $\mathbb{R}!!!$

Preuve : on observe que comme $B_n(0) = B_n(1)$ alors

$f_n(0) = f_n(1)$. Comme elle est 1-périodique, f_n est continue sur $\mathbb{R}$.

Elle est de plus C^∞ par morceaux (car polynomiale).

Soit $n \geq 1$.

On a : $c_0(f_n) = \int_0^1 \frac{B_n(t)}{n!} e^{-2\pi i x_0 t} \, dt$
 $= \frac{1}{n!} \int_0^1 B_n(t) \, dt = 0$

$$0_n = \text{que } f_n' = \frac{1}{n!} B_n' = \frac{n}{n!} 0_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!} 0_{n-1} = f_{n-1}$$

Pour $p \neq 0$, on fait une ICP:

$$\begin{aligned} c_p(f_n) &= \int_0^1 f_n(t) e^{-2\pi i p t} dt \\ &= \left[f_n(t) \frac{e^{-2\pi i p t}}{-2\pi i p} \right]_0^1 + \int_0^1 f_{n-1}(t) \frac{e^{-2\pi i p t}}{2\pi i p} dt \\ &= \frac{f_n(1) - f_n(0)}{-2\pi i p} + \frac{1}{2\pi i p} c_p(f_{n-1}) \\ &= \frac{1}{2\pi i p} c_p(f_{n-1}) \quad \text{car pour } n \geq 2, \quad f_n(0) = f_n(1) \end{aligned}$$

Il suffit donc de calculer pour $n=1$:

$$\begin{aligned} c_p(f_1) &= \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right) e^{-2\pi i p t} dt \\ &= \int_0^1 t e^{-2\pi i p t} dt \\ &= \left[t \frac{e^{-2\pi i p t}}{-2\pi i p} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{e^{-2\pi i p t}}{2\pi i p} dt \\ &= \frac{-1}{2\pi i p} + 0 \end{aligned}$$

Finalement: $c_p(f_n) = \frac{-1}{(2\pi i p)^n}$ pour $p \neq 0$

Prop: Pour tout $h \geq 1$, on a:

$$\zeta(2h) = \frac{(-1)^{h+1}}{(2h)!} 2^{2h-1} \pi^{2h} B_{2h}(0)$$

où $\zeta(s) = \sum_{h \geq 1} \frac{1}{h^s}$ pour $s > 1$

Preuve: D'après le théorème de Dirichlet, comme f_{2h} est 1 -périodique et de classe C^∞ par morceaux, on a CVN de sa série de Fourier vers elle

$$B_4(t) = t^4 - 2t^3 + t^2 - \frac{1}{30}$$

on regarde alors en $t=0$

on a :

even

$$\begin{aligned} f_{2h}(t) &= \sum_{p \in \mathbb{Z}} c_p(f_{2h}) e^{2ip\pi t} \\ &= \sum_{p=1}^{+\infty} c_p(f_{2h}) e^{2ip\pi t} + \sum_{p=1}^{+\infty} c_p(f_{2h}) e^{-2ip\pi t} \\ &= \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{-1}{(2ip)^{2h}} (e^{2ip\pi t} + e^{-2ip\pi t}) \end{aligned}$$

On évalue en $t=0$:

$$f_{2h}(0) = - \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2}{2^{2h} (-1)^h p^{2h} \pi^{2h}}$$

Donc :

$$\frac{B_{2h}(0)}{(2h)!} = (-1)^{h+1} \frac{2^{-2h+1}}{2} \pi^{-2h} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^{2h}} = \zeta(2h)$$

$$\text{Donc : } \zeta(2h) = \frac{(-1)^{h+1}}{(2h)!} 2^{2h-1} \pi^{2h} B_{2h}(0)$$

Remarques :

FGN ANAL 1) Comme $B_2(0) = \frac{1}{6}$ alors

300

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{2\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{6}$$

Comme $B_4(0) = -\frac{1}{30}$ alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{-8}{24} \pi^4 \frac{(-1)}{30} = \frac{\pi^4}{90}$$

CAL 2 2) Si l'on essaie pour f_{2h+1} , on obtient

109

$$f_{2h+1}(0) = 0 \quad \text{car} \quad B_{2h+1}(0) = 0$$

3) On peut en déduire un développement asymptotique

pour $B_{2h}(0)$.

En effet, comme la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2h}}$ est normalement cv
sur $[2; +\infty[$

(on a alors $\frac{1}{n^{2h}} \leq \frac{1}{n^2}$ qui est le rg d'une série cv)

alors comme $\frac{1}{n^{2h}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ pour $n \geq 2$ on a :

$$\zeta(2h) = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{2h}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

D'où :

$$|B_{2h}(0)| = \zeta(2h) \frac{1}{(2\pi)^{2h}} \cdot 2 \cdot (2h)!$$

$$\sim \frac{2 \cdot (2h)!}{(2\pi)^{2h}} \quad \left. \vphantom{\frac{2 \cdot (2h)!}{(2\pi)^{2h}}} \right\} \text{ grâce à Stirling}$$

$$\sim \frac{2}{(2\pi)^{2h}} \sqrt{4\pi h}^1 \left(\frac{2h}{e}\right)^{2h} = 4\sqrt{\pi h}^1 \left(\frac{h}{\pi e}\right)^{2h}$$