

Note: $AM = \|\vec{AM}\|$ distance euclidienne des points A et M. On fait l'abus de notation $o(h) = o(h)$

Théorème: Soient A, B, C 3 points non alignés de $\mathbb{R}^2$. On suppose les 3 angles du triangle ABC $< \frac{\pi}{2}$. Alors,

$f: M \in \mathbb{R}^2 \mapsto AM + BM + CM \in \mathbb{R}^+$ admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ atteint en 1 unique point P intérieur au triangle ABC, distinct de A, B et C.

De plus, $\hat{APB} = \hat{APC} = \hat{BPC} = \frac{2\pi}{3}$.

Preuve: Étape 1. f est coconvexe, différentiable, convexe sur $\mathbb{R}^2$

Coconvexe: $\forall M \in \mathbb{R}^2$, $OM \leq OA + AM (= AM)$, $OM - OA$ par inégalité triangulaire et relation de Chasles.

Ainsi, $f(M) \geq OM - OA + OM - OB + OM - OC = 3OM - f(O) \xrightarrow{OM \rightarrow +\infty} +\infty$ Rappel: $OM = \|\vec{OM}\| = \|\vec{OM}\|$.

Différentiable: f étant polynomiale en les coordonnées de M (On a $AM = \sqrt{\langle \vec{AM}, \vec{AM} \rangle} = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2}$), $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

Soit $O \in \mathbb{R}^2$, $f_O: M \in \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \rightarrow OM \in \mathbb{R}^+$, $h \in \mathbb{R}^2$ petit et fixons $M \in \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$. Alors, $f_O(M+h) - f_O(M) = OM(M+h) - OM = \|\vec{OM} + h\| - OM$.
On, $\|\vec{OM} + h\| = \sqrt{\langle \vec{OM} + h, \vec{OM} + h \rangle} = (OM^2 + 2\langle \vec{OM}, h \rangle + \|h\|^2)^{1/2} = OM \left(1 + 2\frac{\langle \vec{OM}, h \rangle}{OM^2} + \frac{\|h\|^2}{OM^2}\right)^{1/2} \stackrel{\text{DL de Taylor}}{=} OM \left(1 + \frac{\langle \vec{OM}, h \rangle}{OM^2} + \frac{1}{2} \frac{\|h\|^2}{OM^2} + o\left(\frac{\langle \vec{OM}, h \rangle}{OM^2} + \frac{\|h\|^2}{OM^2}\right)\right)$
 $\stackrel{(*)}{=} OM \left(1 + \frac{\langle \vec{OM}, h \rangle}{OM^2} + o(h)\right)$. Donc, $f_O(M+h) - f_O(M) = \frac{\langle \vec{OM}, h \rangle}{OM} + o(h)$ et $\vec{\nabla} f_O(M) = \frac{\vec{OM}}{OM}$.

↑ J'explique ce passage en fin de doc!

Convexité: Soient $M, N \in \mathbb{R}^2$ distincts. On se place dans le plan complexe et on note a, b, c, m, n les affixes de A, B, C, M et N. Soit $t \in]0, 1[$, on a: $\vec{\nabla}$ plus simple pour la rédaction. Donc $AM = |a - m|$ par exemple.

$$f(tM + (1-t)N) = \sum_{i \in \{a, b, c\}} |i - (tm + (1-t)n)| = \sum_{i \in \{a, b, c\}} |t(i - m) + (1-t)(i - n)| \stackrel{(*)}{\leq} \sum_{i \in \{a, b, c\}} t|i - m| + (1-t)|i - n| = tf(M) + (1-t)f(N).$$

De plus, $(*)$ est une égalité si: $\begin{cases} A, M, N \\ B, M, N \\ C, M, N \end{cases}$ sont alignés, ce qui est impossible par hypothèse. Donc, f est strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$.
Donc A, B, C alignés

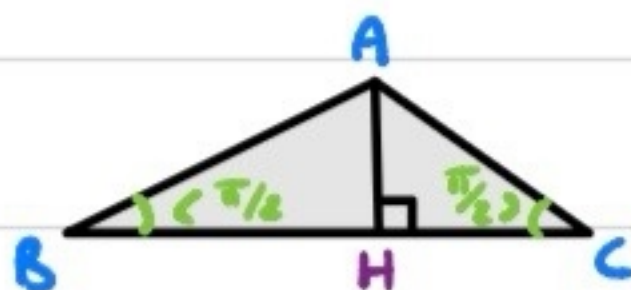
Étape 2: $P \notin \{A, B, C\}$

f étant coconvexe et strictement convexe, elle admet un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ atteint en 1 unique point $P \in \mathbb{R}^2$. De plus, au moins 2 angles

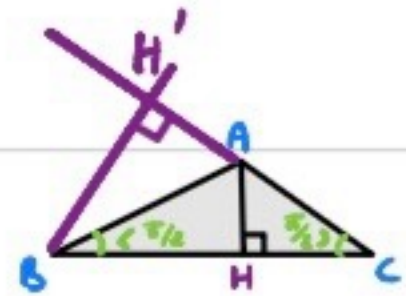
du triangle ABC sont $< \frac{\pi}{2}$. Somme des angles d'un triangle = $\pi = 180^\circ$. Supposons $\hat{B}$ et $\hat{C} < \frac{\pi}{2}$. Alors, $H \in [BC]$ avec H le pied de la

hauteur issue de A et $f(H) = HA + HB + HC = HA + BC < BA + AC = f(B)$ (et donc $f(H) < f(C)$). Donc, $P \notin \{B, C\}$.
↑ Pythagore

Remarque: Pour avoir $H=B$ (resp. $H=C$), il faudrait avoir $\hat{B} = \frac{\pi}{2}$ ou $\hat{C} = \frac{\pi}{2}$, 2 cas exclus



Cos de A: Si $\hat{A} < \frac{\pi}{2}$, même argument. Sinon, on ne peut pas utiliser le même argument car le pied



H' de la hauteur issue de B (ou C) $\notin [AC]$ (ou $[AB]$). Utilisons un autre argument si $\hat{A} \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}]$:

Considérons M sur la bissectrice de $\hat{A} = 2\alpha$. On a: $MB^2 = AB^2 - 2AB \cdot AM \cos \alpha + AM^2 \Rightarrow MB = (AB^2 - 2AB \cdot AM \cos \alpha + AM^2)^{1/2}$

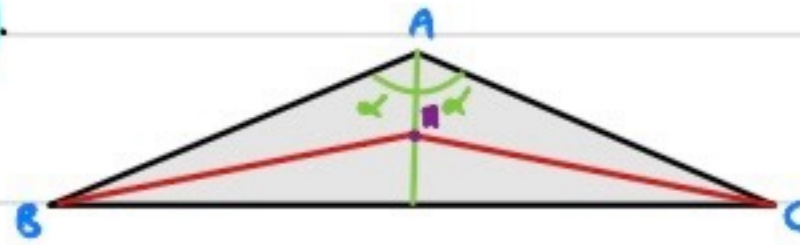
$$= AB \left(1 - 2 \frac{AM}{AB} \cos \alpha + \left(\frac{AM}{AB} \right)^2 \right)^{1/2} \stackrel{\text{DL de Taylor}}{=} AB \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{AM}{AB} \right)^2 - \frac{AM}{AB} \cos \alpha + o \left(\left(\frac{AM}{AB} \right)^2 \right) - 2 \frac{AM}{AB} \cos \alpha \right) = AB \left(1 - \frac{AM}{AB} \cos \alpha + o(AM) \right) = AB - AM \cos \alpha + o(AM)$$

$AB \neq 0$ car A, B, C non alignés $\Rightarrow A \neq B$

Par raisonnement identique, $MC = AC - AM \cos \alpha + o(AM)$ et $f(M) = AM + BM + CM = AM + \underbrace{AB + AC}_{f(A)} - 2AM \cos \alpha + o(AM) = f(A) + AM(1 - 2\cos \alpha) + o(AM)$.

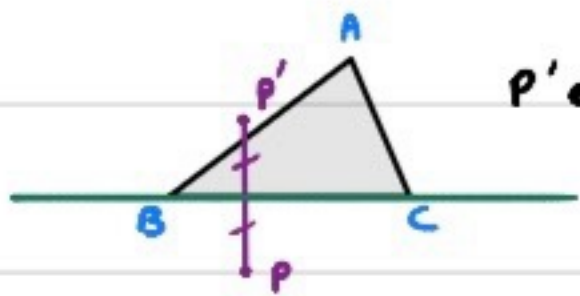
On, par hypothèse, $2\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}] \Rightarrow \alpha \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}] \Rightarrow \cos \alpha \in]\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}] \Rightarrow 2\cos \alpha \in]1, \sqrt{2}]$ et donc $1 - 2\cos \alpha < 0$. Donc, quand

M est assez proche de A , $f(M) < f(A)$ et $P \neq A$.



Étape 3: P est à l'intérieur de ABC . *Parso je fais cette étape juste avec le dessin à l'étape 2*

Supposons P à l'extérieur de ABC . Alors, on peut considérer le cas suivant:



P' est la symétrique de P par rapport à (BC) et $f(P') < f(P) \rightarrow$ Absurde ($AP' < AP$)

Donc, si P à l'extérieur de ABC , on peut construire P' tq $f(P') < f(P)$. Ainsi, P est à l'intérieur de ABC (et $P \notin \{A, B, C\}$ par étape 2).

Étape 4: $\hat{APB} = \hat{APC} = \hat{BPC} = \frac{2\pi}{3}$.

P étant un point extrémaux de F , $\vec{\nabla} f(P) = 0 \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = 0$ avec $\vec{u} = \frac{\vec{AP}}{AP}$, $\vec{v} = \frac{\vec{BP}}{BP}$, $\vec{w} = \frac{\vec{CP}}{CP}$ par étape 1. Ainsi, ces vecteurs étant unitaires,

$$1 = \|\vec{w}\|^2 = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \Rightarrow \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = -\frac{1}{2} = \cos(\hat{u}, \vec{v})$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\hat{u}, \vec{v}) \stackrel{APB}{\Rightarrow} \cos(\hat{APB}) = -\frac{1}{2}$$

$\hat{APB} = \hat{APC} = \hat{BPC} = \frac{2\pi}{3}$. Ici, on démontre que P ne peut pas être sur l'un des côtés du triangle.

$\cos(\alpha) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha \in \{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\}$. Donc ici, nécessairement, les angles valent $\frac{2\pi}{3}$.

Référence: Petit guide de calcul différentiel, Rouvière (p. 386 à 389) *l'étape 1 m'est pas dans la référence!*

Leçons: 161 - 215 - 219 - 229 - 253 - 218 ← envisageable grâce aux 2 ou 3 DL (3 si on fait l'étape 1 avec la méthode en fin de document)
 perso, je mettrais ce dev en 218 si rien de mieux.

- Remarques:
- Le dev écrit comme ça est trop long, c'est évident. Il faut le raccourcir: On peut accepter des points en fonction de la leçon ou faire des passages à l'oral (comme le début de l'étape 2 et l'étape 3).
 - L'étape 1 est de loin la plus technique, mais une fois maîtrisée tout va bien!
 - Le dev est un investissement: dur à bien maîtriser mais rentable, c'est de la géométrie!
 - Il faut savoir démontrer ce qui est souligné en vert.
 - Je propose une autre méthode pour la convexité en fin de doc!

Prop: Soit $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ coercive et strictement convexe. Alors, f admet un unique minimum sur $\mathbb{R}^n$.

Preuve: Unicité: Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x \neq y$, $f(x) = f(y) = \min_{z \in \mathbb{R}^n} f(z)$. On a $\forall t \in]0,1[$, $f(xt + (1-t)y) < t f(x) + (1-t)f(y) = t f(x) + (1-t)f(x) = f(x) \rightarrow$ Absurde.
 $\in \mathbb{R}^n$ convexe

Donc, $x = y$.

Existence: Soit $m \in \mathbb{R}$, $f(0_{\mathbb{R}^n}) = m$. f étant convexe, elle est continue et $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq m\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

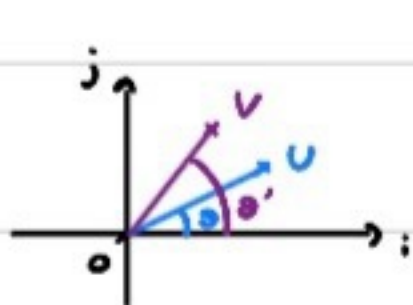
De plus, f étant coercive ($f(x) \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty$), on a nécessairement A borné. Ainsi, A est un compact de $\mathbb{R}^n$ et par continuité de f , f atteint un minimum global sur A qui est en fait un minimum global sur $\mathbb{R}^n$ par construction de A . □

Prop: (AP Kashi). Soient $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ non alignés. Alors, $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2 BC \cdot AC \cdot \cos(\alpha)$



Preuve: On a $AB^2 = \langle \vec{AB}, \vec{AB} \rangle \stackrel{\text{Chasles}}{=} \langle \vec{AC} + \vec{CB}, \vec{AC} + \vec{CB} \rangle = AC^2 + BC^2 + 2 \langle \vec{AC}, \vec{CB} \rangle = AC^2 + BC^2 - 2 \langle \vec{CA}, \vec{CB} \rangle = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos(\alpha)$. □

Remarque: On a utilisé $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\angle(\vec{u}, \vec{v}))$, mais il faut savoir le démontrer! (c'est de la géométrie de base, pas d'inquiétude).



On a $\vec{u} = \|\vec{u}\| (\cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j})$ et $\vec{v} = \|\vec{v}\| (\cos \theta' \vec{i} + \sin \theta' \vec{j})$.

Ainsi, $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| (\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta') = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| (\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta') = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\theta - \theta')$.

(Je me ramène à ce cas sans perte de généralité)

Enfin, comme $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{i}, \vec{v}) - (\vec{i}, \vec{u})$ et que $\cos(\theta - \theta') = \cos(-(\theta' - \theta)) = \cos(\theta' - \theta)$

Alternative:

Convexité: On va différencier le gradient:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} f_0(\pi+h) - \vec{\nabla} f_0(\pi) &= \frac{\vec{on} + h}{\|\vec{on} + h\|} - \frac{\vec{on}}{\|\vec{on}\|} = \frac{\vec{on} + h}{on(1 + \frac{\langle \vec{on}, h \rangle}{on^2} + o(h))} - \frac{\vec{on}}{on} \\ &\stackrel{\text{DL de } \frac{1}{1+x}}{=} \frac{1}{on} \left((\vec{on} + h) \left(1 - \frac{\langle \vec{on}, h \rangle}{on^2} + o(h) \right) - \vec{on} \right) = \frac{1}{on} \left(h - \frac{\langle \vec{on}, h \rangle}{on^2} \vec{on} + o(h) \right). \end{aligned}$$

Donc, $D\vec{\nabla} f_{0,\pi}(h) = \frac{h}{on} - \frac{\langle \vec{on}, h \rangle}{on^3} \vec{on}$ pour $h \in \mathbb{R}^2$.

$$\text{Ainsi, } D^2 f_{0,\pi}(h, h) = \langle D\vec{\nabla} f_{0,\pi}(h), h \rangle = \frac{\|h\|^2}{on} - \frac{\langle \vec{on}, h \rangle^2}{on^3} \stackrel{\text{Cauchy-Schwarz}}{\geq} \frac{\|h\|^2}{on} - \frac{\|h\|^2}{on} = 0.$$

Donc, f_0 est convexe sur $\mathbb{R}^2$ et strictement convexe ssi $\vec{on}$ et h non colinéaires.

On en déduit que f est strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$ car A, B, C sont non alignés (et donc $\vec{AN}, \vec{BN}, \vec{CN}$ non colinéaires dans $\mathbb{R}^2$).

Résultat supplémentaire: Si $\exists$ un angle $> \frac{2\pi}{3}$, par exemple $\hat{A}$, $P=A$. C'est pas trivial mais je me m'y suis pas intéressé.

Explication de (3): On a $on \left(1 + \frac{\langle \vec{on}, h \rangle}{on^2} + \frac{1}{2} \frac{\|h\|^2}{on^2} + o\left(\frac{\langle \vec{on}, h \rangle}{on^2} + \frac{\|h\|^2}{on^2}\right) \right)$ et on veut mq $\frac{1}{2} \frac{\|h\|^2}{on^2} + o\left(\frac{\langle \vec{on}, h \rangle}{on^2} + \frac{\|h\|^2}{on^2}\right) = o(h)$

• $\frac{\|h\|^2}{on^2} = o(h)$ de manière évidente.

• $o(f(x)) = f(x) \varepsilon(f(x))$ avec $\varepsilon(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$ par définition. Mais alors, $o\left(\frac{\langle \vec{on}, h \rangle}{on^2} + \frac{\|h\|^2}{on^2}\right) = \left(\frac{\langle \vec{on}, h \rangle}{on^2} + \frac{\|h\|^2}{on^2}\right) \varepsilon\left(\frac{\langle \vec{on}, h \rangle}{on^2} + \frac{\|h\|^2}{on^2}\right)$ avec $\varepsilon(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$

Ainsi: • $\frac{\langle \vec{on}, h \rangle}{on^2} \leq \frac{1}{on} \|h\|$ par Cauchy-Schwarz, donc $\frac{\langle \vec{on}, h \rangle}{on^2} \varepsilon\left(\frac{\langle \vec{on}, h \rangle}{on^2} + \frac{\|h\|^2}{on^2}\right) \leq \frac{\|h\|}{on} \varepsilon\left(\frac{\|h\|}{on} + \frac{\|h\|^2}{on^2}\right)$

• $\frac{\|h\|^2}{on^2} = o(h)$.

Conclusion: $o\left(\frac{\langle \vec{on}, h \rangle}{on^2} + \frac{\|h\|^2}{on^2}\right) = o(h)$

Enfin, on a bien $\frac{1}{2} \frac{\|h\|^2}{on^2} + o\left(\frac{\langle \vec{on}, h \rangle}{on^2} + \frac{\|h\|^2}{on^2}\right) = o(h)$

