Théorème : $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ est dense dans $(L^p(\mathbb{R}^m), \|\cdot\|_p)$ $\forall p \in [1;+\infty[$. On admet ici la densité de $C_c(\mathbb{R}^m)$ dans $L^p(\mathbb{R}^m)$

Cas 1 : $f \in L^p(\mathbb{R}^m)$ et $\mathrm{Supp}(f) \subset \overline{B(0,R)}$ où $R>0$

Étape 1 : Construction d'une suite régularisante :

Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) & \text{si } |x|<1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Alors, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et on pose $\tilde{\varphi} : x=(x_1,\dots,x_m) \in \mathbb{R}^m \longmapsto \prod_{k=1}^{m} \varphi(x_k)$. Alors, $\mathrm{Supp}(\tilde{\varphi}) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\|_\infty \leq 1\}$

qui est un compact de $\mathbb{R}^m$, donc $\tilde{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$. Ainsi, on pose alors $\varphi = \dfrac{\tilde{\varphi}}{\int_{\mathbb{R}^m} \tilde{\varphi}(x)\,dx}$ de sorte que $\int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x)\,dx = 1$, $\varphi \geq 0$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$.

Enfin, on peut alors construire la suite $\varphi_k : x \in \mathbb{R}^m \mapsto k^m \varphi(kx) \in \mathbb{R}$ qui est une approximation de l'unité par construction.

On peut alors construire la suite $f_k : x \in \mathbb{R}^m \mapsto f * \varphi_k(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$. Théorème de dérivation sous signe intégrale + f à support compact.

Étape 2 : Majoration utile de $\|f_k - f\|_p^p$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^m$, $|f_k(x) - f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^m} \varphi_k(y)\,|f(x-y)-f(x)|\,dy$. Si $p=1$, $|f_k(x)-f(x)| \leq \left(\int_{\mathbb{R}^m} \varphi_k(y)\,|f(x-y)-f(x)|^p\right)^{1/p}$. Sinon, $\exists q \in]1;+\infty[$ tq

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ et $|f_k(x)-f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^m} |f(x-y)-f(x)|\,\varphi_k(y)^{\frac{1}{p}}\,\varphi_k(y)^{\frac{1}{q}}\,dy \overset{\text{[Hölder]}}{\leq} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(x-y)-f(x)|^p \varphi_k(y)\,dy\right)^{1/p} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^m} \varphi_k(y)\,dy\right)^{1/q}}_{=1}$.

Ainsi, $\forall p \in [1;+\infty[$, $|f_k(x)-f(x)|^p \leq \int_{\mathbb{R}^m} |f(x-y)-f(x)|^p \varphi_k(y)\,dy$, d'où $\|f_k - f\|_p^p \leq \int_{\mathbb{R}^m}\int_{\mathbb{R}^m} |f(x-y)-f(x)|^p \varphi_k(y)\,dy\,dx \underset{\text{[Fubini-Tonelli]}}{=} \int_{\mathbb{R}^m} \varphi_k(y) \int_{\mathbb{R}^m} |f(x-y)-f(x)|^p\,dx\,dy$

$= \int_{\mathbb{R}^m} \varphi_k(y)\,\|\tau_y f - f\|_p^p\,dy$.

Étape 3 : $\|f_k - f\|_p^p \xrightarrow[k]{} 0$

On sait que $\lim_{y\to 0} \|\tau_y f - f\|_p = 0$ $\forall p \in [1;+\infty[$. Ainsi, $\exists \delta > 0$ tq $\forall y \in \mathbb{R}^m$, $\|y\| < \delta \Rightarrow \|\tau_y f - f\|_p^p < \varepsilon$.

Ainsi, $\int_{\mathbb{R}^m} \varphi_k(y)\,\|\tau_y f - f\|_p^p\,dy = \int_{\|y\|\geq\delta} \varphi_k(y)\,\|\tau_y f - f\|_p^p\,dy + \int_{\|y\|<\delta} \varphi_k(y)\,\|\tau_y f - f\|_p^p\,dy \leq 2^p\|f\|_p^p \int_{\|y\|\geq\delta} \varphi_k(y)\,dy + \varepsilon \int_{\|y\|<\delta} \varphi_k(y)\,dy \leq \varepsilon(2^p\|f\|_p^p + 1)$

($\leq 2^p\|f\|_p^p < +\infty$ car $\|\tau_y f\|_p = \|f\|_p$; $\leq \varepsilon$; $\leq \varepsilon$ car φ_k approximation de l'unité ; ≤ 1)

Enfin, on a construit une suite dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ convergeant vers f.

Cas 2 : $f \in L^p(\mathbb{R}^m)$ quelconque

On pose, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $g_k = f\mathbb{1}_{\overline{B(0,k)}}$. Alors, $\|g_k - f\|_p^p \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ par TCD. Donc, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists R > 0$ et $g \in L^p$ à support compact dans $\overline{B(0,R)}$ (Grâce à la suite g_k)

tq $\|f-g\|_p \leq \varepsilon$. De plus, par 1), $\exists h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ tq $\|h-g\|_p \leq \varepsilon$. Enfin, $\|f-h\|_p \leq \|f-g\|_p + \|g-h\|_p \leq 2\varepsilon$. □

[Minkowski]

MADE WITH Scanner App

Fin de doc

Référence : Théorie de l'intégration, Pagès, Briane (légèrement modifié) + Analyse de Fourier, El Amrani, p. 109 (pour l'application).

Leçons : 201 - 234 - 241 - 209 - 250

↳ À condition de faire l'application que je propose en fin de doc, quitte à aller vite sur la densité. (Sinon, je donne direct la majoration utile).

Remarques : - Les rapports du jury semblent indiquer qu'on peut se restreindre à la droite réelle, mais c'est la même preuve à la seule différence la suite régularisante

- Il faut savoir prouver .

Cas $p=+\infty$: La proposition " $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^m)$, $\lim_{y\to 0} \|\tau_y f - f\|_\infty = 0$ " est fausse ! Donc, cette preuve est fausse pour $p=+\infty$.

Contre-exemple : Supposons f la fonction indicatrice d'un intervalle $[a;b]$, $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, $m=1$. Alors, $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ car f est bornée

et $\forall y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\|\tau_y f - f\|_\infty = \sup_{x\in[a;b]} |f(x-y)-f(y)| = \sup_{x\in[a;b]} |\mathbb{1}_{x-y\in[a;b]} - \mathbb{1}_{x\in[a;b]}| = 1$ car $y\neq 0$. Donc, si $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\nexists \delta>0$ tq $\forall |y|<\delta$, $\|\tau_y f - f\|_\infty < \frac{1}{2}$.

Prop : $\forall p \in [1;+\infty[$, $f\in L^p(\mathbb{R}^d)$, $\lim_{a\to 0} \|\tau_a f - f\|_p = 0$

Preuve : On sépare en 2 cas :

1) $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$. Alors, par le thm de Heine, f est uniformément continue et, $\forall \varepsilon>0$, $\exists \eta>0$ tq $|a|<\eta \Rightarrow \forall x\in\mathbb{R}^d$, $|f(x-a)-f(x)|<\varepsilon$.

Ainsi, si $|a|<\eta$, $\|\tau_a f - f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-a)-f(x)|^p dx = \int_{(a+\{f\neq 0\})\cup\{f\neq 0\}} |f(x-a)-f(x)|^p dx \leq \varepsilon^p (\lambda_d(\{f\neq 0\}+a) + \lambda_d(\{f\neq 0\})) \leq \varepsilon^p 2\lambda_d(\overline{\{f\neq 0\}})$. On,

$\lambda_d(\overline{\{f\neq 0\}}) < +\infty$ car $\overline{\{f\neq 0\}}$ est compact. Ainsi, $|a|<\eta \Rightarrow \|\tau_a f - f\|_p \leq \varepsilon (2\lambda_d(\overline{\{f\neq 0\}}))^{1/p}$ et si $f\in C_c(\mathbb{R}^d)$, la proposition est vérifiée.

2) Si $f\in L^p(\mathbb{R}^d)$ alors, par densité de $C_c(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ que l'on a admis en début de dev, $\exists (f_m)_m \subset C_c(\mathbb{R}^d)$ tq $\lim_{m\to+\infty} \|f_m - f\|_p = 0$. On,

$\|\tau_a f - f\|_p \leq \|\tau_a f - \tau_a f_m\|_p + \|\tau_a f_m - f_m\|_p + \|f_m - f\|_p \leq 2\|f_m - f\|_p + \|\tau_a f_m - f_m\|_p$. Soit $\varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}^*$ tq $\|f_N - f\|_p \leq \varepsilon$ et $\exists \eta>0$ tq $\|\tau_a f_N - f_N\|_\infty \leq \varepsilon$ $\forall |a|<\eta$

Ainsi, $|a|<\eta \Rightarrow \|\tau_a f - f\|_p \leq 3\varepsilon$. Donc, $\forall p\in[1;+\infty[$, $\forall f\in L^p(\mathbb{R}^d)$, $\lim_{a\to 0} \|\tau_a f - f\|_p = 0$. □

MADE WITH Scanner App

Application de la densité des fonctions tests

Théorème : (Riemann-Lebesgue) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Alors, $\hat{f}$ existe et on a $\lim_{|z| \to +\infty} \hat{f}(z) = 0$.

Preuve : Tout d'abord, $\forall z \in \mathbb{R}$, on a $|\hat{f}(z)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx < +\infty$, donc $\hat{f}$ existe. Prouvons le théorème en traitant 2 cas :

- Si $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\operatorname{Supp} f \in]-a;a[$, $a>0$, alors $\hat{f}(z) = \int_{-a}^{a} f(t) e^{itz}\,dt$ $\forall z \in \mathbb{R}$. Ainsi, $\forall z \neq 0$, on réalise une intégration par partie :

$$\hat{f}(z) = \underbrace{\left[f(t)\frac{e^{itz}}{iz}\right]_{-a}^{a}}_{=0 \text{ car } \operatorname{Supp} f \subset]-a;a[} - \frac{1}{iz}\int_{-a}^{a} f'(t) e^{itz}\,dt.$$

Donc, $\forall z \neq 0$, $|\hat{f}(z)| \leq \frac{2a}{|z|}\|f'\|_\infty < +\infty$ car $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et alors $\lim_{|z| \to +\infty} \hat{f}(z) = 0$.

- Regardons alors le cas général où $f \in L^1(\mathbb{R})$. Par densité de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $L^1(\mathbb{R})$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tel que $\|f - \varphi\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Fixons ε et une telle fonction φ : comme $\lim_{|z| \to +\infty} \hat{\varphi}(z) = 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que, $\forall |z| \geq N$, $z \in \mathbb{R}$, $|\hat{\varphi}(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Enfin, $\forall z \in \mathbb{R}$ tel que $|z| \geq N$, on a :

linéarité de la transformation de Fourier

$$|\hat{f}(z)| \leq |\hat{f}(z) - \hat{\varphi}(z)| + |\hat{\varphi}(z)| = |\widehat{f-\varphi}(z)| + |\hat{\varphi}(z)| \leq \|f - \varphi\|_1 + |\hat{\varphi}(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Donc, $\lim_{|z| \to +\infty} \hat{f}(z) = 0$. □

MADE WITH Scanner App

Théorème : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $(L^p(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_p)$ $\forall p \in [1;+\infty[$. On admet ici la densité de $C_c(\mathbb{R}^n)$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$

cas 1 : $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $\mathrm{Supp}(f) \subset \overline{B(0,R)}$ où $R>0$

Étape 1 : Construction d'une suite régularisante :

Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-\|x\|^2}\right) & \text{si } \|x\|<1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Alors, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et on pose $\varphi = \frac{\varphi}{\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx}$ de sorte que $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx = 1$, $\varphi \geq 0$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Enfin, on peut alors construire la suite $\varphi_k : x \in \mathbb{R}^n \mapsto k^n \varphi(kx) \in \mathbb{R}$ qui est une approximation de l'unité par construction.

On peut alors construire la suite $f_k : x \in \mathbb{R}^n \mapsto f * \varphi_k(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Théorème de dérivation sous signe intégrale + f à support compact.

Étape 2 : Majoration utile de $\|f_k - f\|_p^p$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, $|f_k(x) - f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(y) |f(x-y) - f(x)| dy$. Si $p=1$, $|f_k(x) - f(x)| \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(y) |f(x-y) - f(x)|^p\right)^{1/p}$. Sinon, $\exists q \in]1;+\infty[$ tq $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $|f_k(x) - f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)| \varphi_k(y)^{\frac{1}{p}} \varphi_k(y)^{\frac{1}{q}} dy \overset{\text{[Hölder]}}{\leq} \left(\int_0^{\wedge} |f(x-y) - f(x)|^p \varphi_k(y) dy\right)^{1/p} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(y) dy\right)^{1/q}}_{=1}$.

Ainsi, $\forall p \in [1;+\infty[$, $|f_k(x) - f(x)|^p \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p \varphi_k(y) dy$, d'où $\|f_k - f\|_p^p \leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p \varphi_k(y) dy dx \underset{\text{[Fubini-Tonelli]}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(y) \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p dx dy$

$= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(y) \|\tau_y f - f\|_p^p dy$.

Étape 3 : $\|f_k - f\|_p^p \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$

On sait que $\lim_{y \to 0} \|\tau_y f - f\|_p = 0$ $\forall p \in [1;+\infty[$. Ainsi, $\exists \delta > 0$ tq $\forall y \in \mathbb{R}^n$, $|y| < \delta \Rightarrow \|\tau_y f - f\|_p^p < \varepsilon$.

Ainsi, $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(y) \|\tau_y f - f\|_p^p dy = \int_{|y| \geq \delta} \varphi_k(y) \underbrace{\|\tau_y f - f\|_p^p}_{\leq 2^p \|f\|_p^p < +\infty \text{ car } \|\tau_y f\|_p = \|f\|_p} dy + \int_{\|y\| < \delta} \varphi_k(y) \underbrace{\|\tau_y f - f\|_p^p}_{< \varepsilon} dy \leq 2^p \|f\|_p^p \underbrace{\int_{|y| \geq \delta} \varphi_k(y) dy}_{< \varepsilon \text{ car } \varphi_k \text{ approximation de l'unité}} + \varepsilon \underbrace{\int_{|y| < \delta} \varphi(y) dy}_{\leq 1} \leq \varepsilon(2^p \|f\|_p^p + 1)$

Enfin, on a construit une suite dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ convergeant vers f.

cas 2 : $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ quelconque

On pose, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $g_k = f \mathbb{1}_{\overline{B(0,k)}}$. Alors, $\|g_k - f\|_p^p \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$ par TCD. Donc, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists R > 0$ et $g \in L^p$ à support compact dans $\overline{B(0,R)}$ (Grâce à la suite g_k) tq $\|f - g\|_p \leq \varepsilon$. De plus, par 1), $\exists h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ tq $\|h - g\|_p \leq \varepsilon$. Enfin, $\|f - h\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - h\|_p \leq 2\varepsilon$. □ (Inégalité de Minkowski)

MADE WITH Scanner App