

Développement : Théorème de Pólya

Étienne PEILLON

Ce développement consiste en l'étude d'une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^d$, avec $d \in \mathbb{N}^*$. On note $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$, la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $X_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$, où $(\xi_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ sont des variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $\{\pm e_1, \dots, \pm e_d\}$.

Théorème

La chaîne de Markov $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est récurrente si, et seulement si, $d \leq 2$.

Le recasage est le suivant :

- ***** 261 : Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications
- ***** 264 : Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications
- ***** 266 : Utilisation de la notion d'indépendance en probabilités
- **** 235 : Problèmes d'interversion de symboles en analyse
- **** 241 : Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples
- *** 236 : Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables

Développement

Partie 1 : position du problème. On note R l'événement de retour en temps fini en 0. Cela s'écrit simplement

$$R = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{X_n = 0\}.$$

Ainsi, la suite est récurrente si $\mathbb{P}(R) = 1$. On note N_0 le nombre de retours en 0 de la marche aléatoire, qui s'écrit simplement $N_0 = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{X_k=0\}}$. Ainsi, si la suite est récurrente, $N_0 = +\infty$ presque sûrement. A contrario, si $\mathbb{P}(R) < 1$, alors N_0 suit une loi géométrique de paramètre $1 - \mathbb{P}(R)$. En effet,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_0 \geq k+1) &= \mathbb{P}(N_0 \geq k+1 | N_0 \geq k) \mathbb{P}(N_0 \geq k) \\ &= \mathbb{P}(N_0 \geq 1 | N_0 \geq 0) \mathbb{P}(N_0 \geq k) \\ &= \mathbb{P}(R) \mathbb{P}(N_0 \geq k), \end{aligned}$$

et comme $\mathbb{P}(N_0 \geq 0) = 1$, on a $\mathbb{P}(N_0 \geq k) = \mathbb{P}(R)^k$. Puis, comme $\{N_0 \geq k+1\} \subset \{N_0 \geq k\}$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_0 = k) &= \mathbb{P}(\{N_0 \geq k\} \cap \{N_0 \leq k\}) \\ &= \mathbb{P}(\{N_0 \geq k\} \cap \{N_0 \geq k+1\}^c) \\ &= \mathbb{P}(N_0 \geq k) - \mathbb{P}(N_0 \geq k+1) \\ &= \mathbb{P}(R)^k (1 - \mathbb{P}(R)).\end{aligned}$$

Remarque

On pourrait être tenté d'écrire $\mathbb{P}(N_0 = k+1) = \mathbb{P}(N_0 = k+1 | N_0 \geq k) \mathbb{P}(N_0 \geq k)$, mais ça n'est pas conclusif. Et puis $\mathbb{P}(N_0 = k+1) = \mathbb{P}(N_0 = k+1 | N_0 = k) \mathbb{P}(N_0 = k)$ est archi-faux.

De fait, via le théorème de Fubini-Tonelli, on a

$$\mathbb{E}(N_0) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{X_k=0\}}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X_k=0\}}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_k = 0).$$

Ainsi, la marche aléatoire est transiente si, et seulement si, la série de termes générale $\mathbb{P}(X_k = 0)$ converge.

Partie 2 : fonction caractéristique. On introduit les fonctions caractéristiques de ξ_1 et de X_n données par

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \mathbb{E}(e^{2i\pi\langle x, \xi_1 \rangle}) \quad , \quad \text{et} \quad \varphi_n : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \mathbb{E}(e^{2i\pi\langle x, X_n \rangle}) \quad .\end{aligned}$$

D'abord, comme les variables aléatoires ξ_k sont i.i.d., pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\varphi_n(x) = \mathbb{E}(e^{2i\pi\langle x, X_n \rangle}) = \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^n e^{2i\pi\langle x, \xi_k \rangle}\right) = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}(e^{2i\pi\langle x, \xi_k \rangle}) = \varphi(x)^n.$$

Remarque

Il peut être judicieux de faire remarquer que φ et φ_n sont $\mathbb{Z}^d$ -périodiques, ce qui justifie l'intérêt porté à l'hypercube $[0, 1]^d$.

Par ailleurs, par définition de l'espérance et linéarité de l'intégrale

$$\begin{aligned}\int_{[0,1]^d} \varphi_n(x) dx &= \int_{[0,1]^d} \mathbb{E}(e^{2i\pi\langle x, X_n \rangle}) dx = \int_{[0,1]^d} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} e^{2i\pi\langle x, k \rangle} \mathbb{P}(X_n = k) dx \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{P}(X_n = k) \int_{[0,1]^d} e^{2i\pi\langle x, k \rangle} dx.\end{aligned}$$

Or, si $k = (k_1, \dots, k_d)$, alors d'après le théorème de Fubini,

$$\int_{[0,1]^d} e^{2i\pi\langle x, k \rangle} dx = \prod_{j=1}^d \int_0^1 e^{2i\pi x_j k_j} dx_j = \prod_{j=1}^d \mathbb{1}_{\{k_j=0\}} = \mathbb{1}_{\{k=0\}},$$

de sorte que

$$\int_{[0,1]^d} \varphi_n(x) dx = \mathbb{P}(X_n = 0).$$

Partie 3 : développement en série.

Remarque

Moralement, on veut écrire

$$1 + \mathbb{E}(N_0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{[0,1]^d} \varphi_n(x) dx = \int_{[0,1]^d} \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi(x)^n dx = \int_{[0,1]^d} \frac{1}{1 - \varphi(x)} dx.$$

Il y a deux problèmes à ces manipulations : l'interversion série-intégrale et le calcul de la série géométrique.

On commence par calculer φ . Soit $x = (x_1, \dots, x_d) \in [0, 1]^d$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2d} \sum_{k=1}^d e^{2i\pi x_k} + e^{-2i\pi x_k} = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^d \cos(2\pi x_k).$$

Ainsi, d'après l'inégalité triangulaire, $-1 \leq \varphi(x) \leq 1$ et $\varphi(x) = 1$ si, et seulement si, $\cos(2\pi x_k) = 1$ pour tout $k = 1, \dots, d$, c'est-à-dire que x est un des coins de l'hypercube (qui peuvent tous être identifiés au même point par périodicité). On note C l'ensemble des coins de l'hypercube. Par conséquent, la fonction $1/(1 - \varphi)$ est bien définie sur $[0, 1]^d \setminus C$ et y est continue par continuité de φ .

On régularise φ en multipliant par $\varepsilon \in]0, 1[$ de sorte $|\varepsilon\varphi| \leq \varepsilon < 1$ et la série de termes général $(\varepsilon\varphi)^n$ converge normalement sur $[0, 1]^d$. Ainsi, on a

$$\int_{[0,1]^d} \frac{1}{1 - \varepsilon\varphi(x)} dx = \int_{[0,1]^d} \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n \varphi(x)^n dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n \int_{[0,1]^d} \varphi_n(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon^n \mathbb{P}(X_n = 0).$$

Finalement, le théorème de convergence monotone nous permet d'établir l'identité

$$\int_{[0,1]^d} \frac{1}{1 - \varphi(x)} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_n = 0).$$

Remarque

On omettra le point suivant, car il est uniquement technique et peu significatif. Étant donné $x \in [0, 1]^d$, la fonction $\varepsilon \mapsto \frac{1}{1-\varepsilon\varphi(x)}$ est croissante si, et seulement si $\varphi(x) \geq 0$. Ça n'est pas gênant, car si on sépare l'intégrale en deux parties, l'une sur $\{\varphi \geq 0\}$ et l'autre sur $\{\varphi < 0\}$, le théorème de convergence monotone nous permet quand même de conclure dans le second cas. En effet, on aura $1/(1-\varphi) \leq 1/(1-\varepsilon\varphi) < 1$ de sorte qu'en intégrant sur $\{\varphi < 0\} \subset [0, 1]^d$, on dispose que d'intégrales finies.

Partie 4 : intégrabilité de $1/(1-\varphi)$. Par périodicité de φ , et quitte à intégrer sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d$, il suffit d'étudier la convergence de l'intégrale en 0. Ainsi, au voisinage de 0, on a

$$1 - \varphi(x) = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^d 1 - \cos(2\pi x_k) = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^d 2\pi^2 x_k^2 + \mathcal{O}(x_k^4) = \frac{2\pi^2}{d} \|x\|^2 + \mathcal{O}(\|x\|^4) \sim \frac{2\pi^2}{d} \|x\|^2.$$

Ainsi, $\int 1/(1-\varphi)$ est finie si, et seulement si

$$\int_{B(0,1)} \frac{dx}{\|x\|^2} < \infty.$$

Ainsi,

$$\int_{B(0,1)} \frac{dx}{\|x\|^2} = \int_{\rho=0}^1 \int_{\mathbb{S}_\rho^{d-1}} \frac{d\omega}{\|\omega\|^2} d\rho = \int_{\rho=0}^1 \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \frac{r^{d-1} d\omega}{\rho^2} d\rho = |\mathbb{S}^{d-1}| \int_0^1 \rho^{d-3} d\rho,$$

de sorte que l'intégrale est finie si, et seulement si $d \geq 3$. En conclusion, la marche aléatoire est récurrente si, et seulement si $d \leq 2$.

Références

- [Le +20] Pierre LE BARBENCHON et al. 131 développements pour l'oral. DUNOD, 2020.
- [ZR13] Maxime ZAVIDOVIQUE et Bernard RANDÉ. Un max de maths : problèmes pour agrégatifs et maîtres. Im-et-Ker. Paris : Calvage & Mounet, 2013. ISBN : 978-2-91-635229-9.