Théorème central limite

- Analyse pour l'agreg, Berrus, p 200
- Proba et stats, Chabanal-Bach, p 57
- IP - Kurtzmann - BL

On se place sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

CHA 57 **Théorème de Lévy (ADMIS)** : Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de VA à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Alors $X_n \xrightarrow{\text{loi}} X$ ssi la suite des fonctions caractéristiques Φ_{X_n} converge simplement vers la fonction caractéristique de X :
$\forall t \in \mathbb{R}^d$, $\Phi_{X_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi_X(t)$.

IP 81 **Prop** : Soit X une VA réelle. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Si X admet un moment d'ordre N, alors Φ_X est de classe C^N et $\forall k \in [\![1, N]\!]$ on a $\Phi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}[X^k]$
En particulier : $\Phi_X'(0) = i\,\mathbb{E}[X]$ et $\Phi_X'' = -\mathbb{E}[X^2]$

Preuve : Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $\Phi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\, d\mathbb{P}_X(x)$
Il suffit d'appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégrale car :
- $\forall t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{itx}$ est intégrable car bornée par 1 et $\mathbb{P}_X$ est une mesure de probabilité
- $\forall k \leq N$, $\frac{\partial^k}{\partial t^k}(e^{itx})(x) = (ix)^k e^{itx}$
et on a :
$\left|\frac{\partial^k}{\partial t^k}(e^{itx})(x)\right| \leq |x|^k$ qui est une majoration indépendante de t et intégrable par rapport à $\mathbb{P}_X$ car X admet un moment d'ordre $\geq N$ donc d'ordre $k \leq N$.

Ainsi Φ_X est de classe C^k et :
$\Phi_X^{(k)}(t) = i^k \int_{\mathbb{R}} x^k e^{itx}\, d\mathbb{P}_X(x) = i^k\, \mathbb{E}[X^k e^{itX}]$

BFR 200

Théorème central limite : Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de VA réelles indépendantes et identiquement distribuées, et dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Soit $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et $\overline{X}_n = \frac{1}{n} S_n$.

Alors on a :

$$\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \mathbb{E}[X_1]\right) = \frac{S_n - n\,\mathbb{E}[X_1]}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0, \mathrm{Var}(X_1))$$

Preuve : Sans perte de généralité, on peut supposer que les X_i sont centrées-réduites c'est $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et $\mathrm{Var}(X_1) = 1$.

En effet si l'on pose $Y_i = \frac{X_i - \mathbb{E}[X_1]}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_1)}}$

et que l'on montre que $\sqrt{n}\,\overline{Y}_n \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0,1)$

alors comme $\overline{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - \mathbb{E}[X_1]}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_1)}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_1)}} \left(\overline{X}_n - \mathbb{E}[X_1]\right)$$

on aura : que

$$\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \mathbb{E}[X_1]\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} \sqrt{\mathrm{Var}(X_1)}\,\mathcal{N}(0,1) = \mathcal{N}(0, \mathrm{Var}(X_1))$$

(où la dernière égalité peut être montrée avec les fonctions caractéristiques).

D'après le théorème de Lévy, il suffit de montrer que la suite de fonctions caractéristiques $\left(\Phi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}\right)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction caractéristique de la loi normale centrée-réduite :

$t \mapsto \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$

Soit $t \in \mathbb{R}$. Comme les (X_i) sont IID on a :

$$\Phi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = \mathbb{E}\left[\exp\left(-t\,\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{t}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^{n} \exp\left(i \frac{t}{\sqrt{n}} X_j \right) \right]$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[\exp\left(i \frac{t}{\sqrt{n}} X_j \right) \right] \quad \text{par indépendance}$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \Phi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \quad \text{car même loi}$$

$$= \left(\Phi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right)^n$$

On a comme $X_1 \in L^2$, Φ_{X_1} est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et l'on a : en posant $u = \frac{t}{\sqrt{n}}$ et $u \to 0$:

$$\Phi_{X_1}(u) = 1 + \Phi_{X_1}'(u) \cdot u + \frac{\Phi_{X_1}''(u)}{2!} u^2 + o(u^2)$$

Or $\Phi_{X_1}'(0) = i\,\mathbb{E}[X_1] = 0$ et $\Phi_{X_1}''(0) = -\mathbb{E}[X_1^2]$

$$= -V_{ar}(X_1) = -1$$

Donc un développement de Φ_{X_1} :

$$\Phi_{X_1}(u) = 1 - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$$

Ainsi quand $n \to +\infty$:

$$\Phi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n} \right) \right)^n$$

$$= \left(1 - \frac{t^2}{2n} \right)^n \left(1 + \frac{1}{1 - \frac{t^2}{2n}} o\left(\frac{t^2}{n} \right) \right)^n$$

Pour éviter de reconnaître un théorème compliqué, on montre un petit lemme

BL 137

Lemme : Soit $(z_n)_n$ une suite de nombres complexes tels que $z_n \to 0$. Alors $\lim_{n} \left(1 + \frac{z_n}{n} \right)^n = 1$

Preuve : On a :

$$\left| \left(1 + \frac{z_n}{n} \right)^n - 1 \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{z_n}{n} \right)^k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{|z_n|^k}{n^k}$$

$$= \left(1 + \frac{|z_n|}{n} \right)^n - 1$$

On est donc ramené au cas où $z_n \in \mathbb{R}$.

On a $\forall n \in \mathbb{R}$ $z_n > -1$ et donc :

$$\left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{z_n}{n}\right)\right)$$

$$= \exp\left(n\left(\frac{z_n}{n} + o\left(\frac{z_n}{n}\right)\right)\right)$$

$$= \exp\left(z_n + o(z_n)\right)$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \qquad \square$$

On applique tout ce lemme avec

$$= \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \left(1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$$

$\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-t^2/n}$

$\mathcal{C}$ On a : $\left|\left(1 + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n - 1\right|$

$$= \left|\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} o\left(\frac{1}{n}\right)^k\right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left|o\left(\frac{1}{n}\right)\right|^k = \left(1 + \left|o\left(\frac{1}{n}\right)\right|\right)^n - 1$$

$$= \exp\left(n \ln\left(1 + \left|o\left(\frac{1}{n}\right)\right|\right)\right) - 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

On a donc : $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\Phi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-t^2/2}$$

Cela prouve le théorème. $\square$

BER 205

Application : Théorème de Moivre-Laplace

Soit $p \in]0,1[$. Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ suite de VA réelles telle que $Y_n \sim \mathcal{B}(n,p)$. Alors :

$$\frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0,1)$$

Preuve : Soit (X_n) une suite de VA i.i.d de loi

$\mathrm{Ber}(p)$. Comme les (X_i) admettent une variance, d'après le TCL :

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0,1) \quad \text{car} \quad \mathbb{E}[X_1] = p \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}(X_1) = p(1-p)$$

Or Y_n et $\sum_{i=1}^{n} X_i$ ont la même loi, d'où le résultat.

Application : intervalle de confiance asymptotique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se place sur le modèle statistique $\left(\{0,1\}^n, \{\mathrm{Ber}(p)\}^{\otimes n} \right)$

Soit $X_1, \dots, X_n$ un n-échantillon de loi $\mathrm{Ber}(p)$ avec $p \in]0,1[$.

Soit $\alpha \in]0,1[$, on va déterminer un intervalle de confiance asymptotique de niveau $1-\alpha$ pour p.

D'après le TCL, on a que :

$$\frac{\sqrt{n}\,(\overline{X_n} - p)}{\sqrt{p(1-p)}} \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0,1)$$

On estime p par $\overline{X_n}$ (estimateur sans biais)

Par la LGN, on a $\overline{X_n} \xrightarrow{p.s} p$ donc c'est un estimateur fortement convergent.

Ainsi : $\sqrt{\overline{X_n}(1-\overline{X_n})} \xrightarrow{p.s} \sqrt{p(1-p)}$

(on a composé avec des applications continues).

Alors d'après le lemme de Slutsky :

$$\frac{\sqrt{n}\,(\overline{X_n} - p)}{\sqrt{\overline{X_n}(1-\overline{X_n})}} = \underbrace{\frac{\sqrt{n}\,(\overline{X_n} - p)}{\sqrt{p(1-p)}}}_{\xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0,1)} \times \underbrace{\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{\overline{X_n}(1-\overline{X_n})}}}_{\xrightarrow{p.s} 1} \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0,1)$$

Soit $Y_n = \dfrac{\sqrt{n}\,(\overline{X_n} - p)}{\sqrt{\overline{X_n}(1-\overline{X_n})}}$ et $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

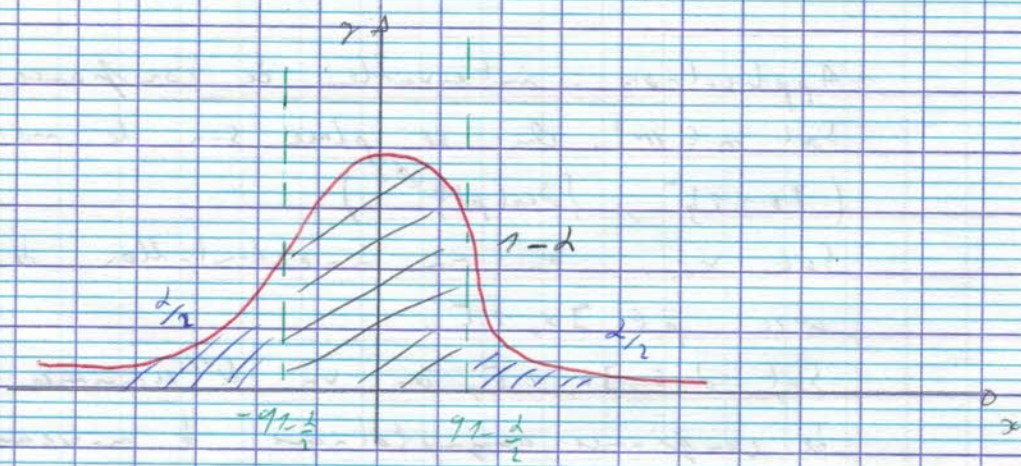
Alors d'après la convergence en loi, on a

~~pour tout~~ $\mathbb{R}$ convergence des fonctions de répartition en tout point de $\mathbb{R}$ (car F_Z est continue)

Soit $q_{1-\frac{\alpha}{2}}$ le quantile d'ordre $1-\frac{\alpha}{2}$ de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ c'à d tel que $\mathbb{P}(Z \leq q_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1-\frac{\alpha}{2}$

Alors :

$\mathbb{P}_p^n(|Y_n| \leq q_{1-\frac{\alpha}{2}}) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}_p(|Z| \leq q_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$ par symétrie



Donc :

$$\mathbb{P}_p\left(p \in \left[\overline{X_n} - q_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sqrt{\overline{X_n}(1-\overline{X_n})}}{\sqrt{n}} \; ; \; \overline{X_n} + \frac{\sqrt{\overline{X_n}(1-\overline{X_n})}}{\sqrt{n}}\right)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1-\alpha$$

On a donc trouvé un intervalle de confiance asymptotique de niveau $1-\alpha$ pour p.

Remarques :

CHA 1) On aspire aussi d'un TCL en dimension d

760 On rappelle des résultats sur les vecteurs gaussiens

Soit X un vecteur gaussien sur $\mathbb{R}^d$ de moyenne m et de matrice de covariance Γ

$u \in \mathbb{R}^d$ Alors $\phi_X(u) = \mathbb{E}\left[e^{-i\langle u, X\rangle}\right] = \mathbb{E}\left[e^{-iu^T X}\right]$

$= e^{-i\langle u, m\rangle} \cdot e^{-\frac{1}{2}\langle \Gamma u, u\rangle}$

La loi gaussienne $\mathcal{N}(m, \Gamma)$ sur $\mathbb{R}^d$ admet une densité

de probabilité par rapport à λ sur $\mathbb{R}^d$ si Γ est inversible. On a alors $\forall x \in \mathbb{R}^d$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det(\Gamma)}} \exp\left(-\frac{1}{2} \langle \Gamma^{-1}(x-m), x-m \rangle\right)$$

Théorème central limite multidimensionnel :

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^d$ IID et dans L^2.

Soit $m = \mathbb{E}[X_1]$ et Γ la matrice de covariance de X_1.

Soit $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Alors :

$$\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - m\right) \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0, \Gamma)$$

2) Il existe plusieurs méthodes pour calculer la fonction caractéristique d'une $\mathcal{N}(0,1)$

- En passant par l'analyse complexe avec un contour rectangulaire et le théorème de Cauchy.
- En appliquant le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale et regarder sur la droite réelle
- Faire une dérivation sous le signe intégrale et résoudre une équa diff

Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ donc $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

Donc :

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} e^{itx} \, dx$$

On peut dériver sous le signe intégrale car X admet un moment d'ordre 1.

On a : $\phi_X'(t) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x e^{-x^2/2} e^{itx} \, dx$

$$= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-x^2/2} e^{itx}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} \, it \, e^{itx} \, dx$$

$$= 0 - t \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} e^{itx} \, dx = -t \, \phi_X(t)$$

Donc Φ_X est solution de $g'(t) = -t\,g(t)$ avec $g(0) = 1$

donc $\Phi_X(t) = e^{-t^2/2}$ $\forall t \in \mathbb{R}$