

Equation aux classes : application à l'étude du centre d'un p-groupe

Leçons concernées : 101, 103, 104

Référence(s) :

- Les Maths en Tête Algèbre - Xavier Gourdon [XG.AI]
- Mathématiques pour l'agrégation : Algèbre et Géométrie - Jean-Etienne Rombaldi [Rom.AI]

Résultat préliminaire : Equation aux classes

→ Théorème 7 et Corollaire 1 page 24 de [XG.AI]

Soit X un ensemble fini et G un groupe fini avec Θ une partie de X contenant exactement un représentant de chacune des orbites qui partitionnent X :

$$\text{Card}(X) = \sum_{x \in \Theta} \text{Card}(\text{Orb}(x)) = \text{Card}(G) \times \sum_{x \in \Theta} \frac{1}{\text{Card}(\text{Stab}(x))}$$

La formule des classes ou « équation aux classes » traduit le fait que les différentes orbites forment une partition de l'ensemble X .

→ Idée de la démonstration :

- on considère la relation d'équivalence sur G : $s \mathcal{R} t \Leftrightarrow s.x = t.x$
- on considère la relation d'équivalence sur X : $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow \exists s \in G ; y = s.x$

Théorème n°1 : Application de l'équation aux classes pour l'étude du centre d'un groupe fini :

→ Théorème 8 page 24 de [XG.AI]

Théorème :

Soit G un groupe fini. Il existe une famille finie $(H_i)_{i \in I}$ de sous-groupes stricts de G telle que :

$$\text{Card}(G) = \text{Card}(Z(G)) + \sum_{i \in I} \frac{\text{Card}(G)}{\text{Card}(H_i)}$$

Démonstration :

Idée : on fait agir G sur lui-même par conjugaison (automorphismes intérieurs) et on applique la formule des classes.

Démo :

Faisons agir G sur lui-même par automorphisme intérieur, c'est-à-dire par l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : G \times G &\rightarrow G \\ (s, x) &\mapsto sxs^{-1} \end{aligned}$$

Par définition, on a alors :

$$\text{Stab}(x) = \{s \in G; sx = xs\} \text{ et } \text{Orb}(x) = \{sxs^{-1}; s \in G\}$$

Ainsi on voit que

$$\text{Stab}(x) = G \Leftrightarrow \{s \in G; sx = xs\} = G \Leftrightarrow x \in Z(G)$$

D'après l'équation aux classes il existe $\Theta \subset G$ tel que :

$$\text{Card}(G) = \sum_{x \in \Theta} \frac{\text{Card}(G)}{\text{Card}(\text{Stab}(x))}$$

En posant $\Theta' = \Theta \setminus Z(G)$ on peut alors écrire :

$$\text{Card}(G) = \sum_{x \in Z(G)} \frac{\text{Card}(G)}{\text{Card}(\text{Stab}(x))} + \sum_{x \in \Theta'} \frac{\text{Card}(G)}{\text{Card}(\text{Stab}(x))}$$

Et donc :

$$\text{Card}(G) = |Z(G)| + \sum_{x \in \Theta'} \frac{\text{Card}(G)}{\text{Card}(\text{Stab}(x))}$$

Questions à anticiper :

- Justifier que $Z(G) \in \Theta$
- Justifier que les stabilisateurs sont des sous-groupes de G
- Justifier que le centre de G est un sous-groupe de G . Est-il distingué ?
- Justifier que les stabilisateurs dans la deuxième somme sont des sous-groupes stricts de G

Théorème n°2 : Centre d'un p-groupe :

→ Exercice 11 page 29 de [XG.AI]

Théorème :

Soit G un p-groupe d'ordre $p^\alpha, \alpha \in \mathbb{N}^*$. On a les résultats suivants :

1. $Z(G) \neq \{e\}$
2. Si $\alpha = 2$, $\text{Card}(Z(G)) = p^2$ et donc G est abélien

Démonstration :

Idée : Pour le premier résultat, on utilise le théorème 1 et on montre que le cardinal du centre est plus grand ou égal à p . Pour le 2, on montre en raisonnant par l'absurde que $Z(G) = G$. On se sert du premier résultat pour établir la liste des candidats potentiels pour le cardinal de $Z(G)$.

Démo :

1. D'après le théorème 1, on a existence d'une famille de sous-groupes stricts de G tels que :

$$\text{Card}(G) = \text{Card}(Z(G)) + \sum_{i \in I} \frac{\text{Card}(G)}{\text{Card}(H_i)} \Leftrightarrow \text{Card}(Z(G)) = \text{Card}(G) - \sum_{i \in I} \frac{\text{Card}(G)}{\text{Card}(H_i)}$$

Par le théorème de Lagrange on a donc :

$$\forall i : \frac{\text{Card}(G)}{\text{Card}(H_i)} = p^{\alpha - \beta_i}; 1 \leq \beta_i < \alpha$$

Or $p | \text{Card}(G)$ donc d'après ce qui précède, $p | \text{Card}(Z(G))$ et comme $\text{Card}(Z(G)) \geq 1$ puisqu'il contient $\{e\}$, on a donc $\text{Card}(Z(G)) \geq p$

2. D'après le résultat démontré plus haut, $Z(G)$ est un sous-groupe de G différent de $\{e\}$. Ainsi, on a nécessairement $\text{Card}(Z(G)) \in \{p, p^2\}$.

Supposons que $\text{Card}(Z(G)) = p$. Prenons alors $x \in G$ et $x \notin Z(G)$

En faisant agir (comme au théorème 1) G sur lui-même par conjugaison on obtient

$\text{Stab}(x) = \{s \in G; sx = xs\}$ qui est un sous-groupe de G . Or $x \in \text{Stab}(x)$ et $Z(G) \subset \text{Stab}(x)$. On en déduit que $\text{Card}(\text{Stab}(x)) \geq p + 1$

Comme $\text{Card}(\text{Stab}(x)) | p^2 = \text{Card}(G)$ ceci entraîne que $\text{Card}(\text{Stab}(x)) = p^2$ et donc $\text{Stab}(x) = G$ ce qui implique que $x \in Z(G)$ ce qui est contradictoire avec l'hypothèse de départ.

On en conclut que $\text{Card}(Z(G)) = p^2$ et donc $Z(G) = G$ c'est-à-dire que G est abélien.

Questions à anticiper :

- Que se passe-t-il pour $\alpha = 1$? $\rightarrow$ voir [Rom.AI] théorème 1.21 page 14
- Démontrer le théorème de Lagrange
- Comment appelle-t-on le stabilisateur d'un élément dans le cas particulier d'une action par automorphisme intérieur ?
- S'attendre à des questions sur le théorème de Sylow (et donc avoir une idée de la preuve présentée en question 3 de l'exercice)