

236
239
245
250

Transformée de Fourier de la Gaussienne

- Analyse de Fourier, El. Amrani, p 156
- Théorie de l'intégration,
Driane - Paquis, p 267

ELA • Prep: Soit $a > 0$. Soit $f(x) = e^{-ax^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

156 Alors $\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4a}\right) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$

Preuve: On a: pour $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} e^{-i\xi x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2 + i\xi x)} \end{aligned}$$

On:

$$\begin{aligned} ax^2 + i\xi x &= a \left(x^2 + 2 \frac{i\xi}{2a} x \right) \\ &= a \left(\left(x + \frac{i\xi}{2a} \right)^2 + \frac{\xi^2}{4a^2} \right) \end{aligned}$$

Donc:

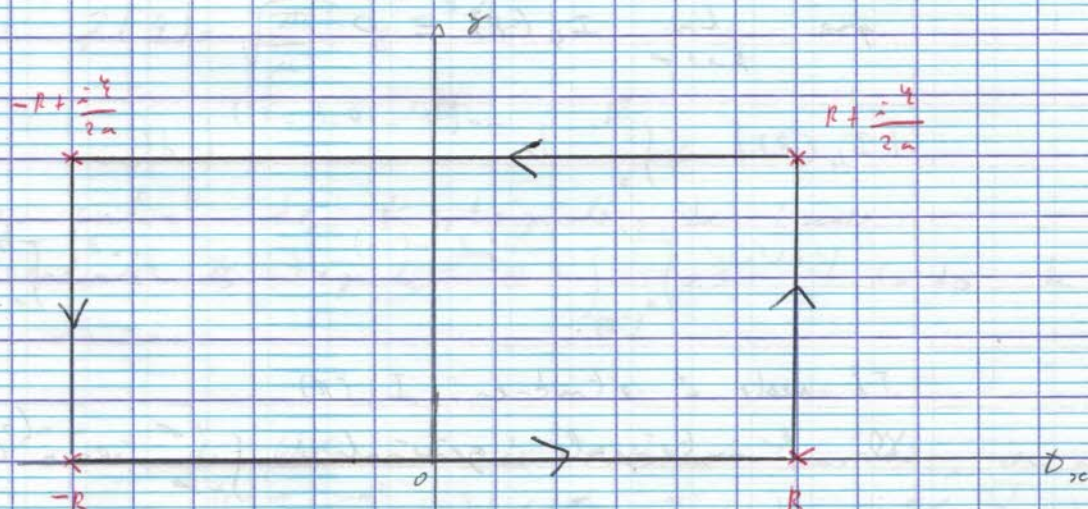
$$\hat{f}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{4a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a \left(x + \frac{i\xi}{2a} \right)^2} dx$$

On pose alors: $f(z) = e^{-az^2}$ pour $z \in \mathbb{C}$

Pour $R > 0$ et $\xi \in \mathbb{R}$ fixé, on note $\Gamma(R)$

le rectangle de sommets $-R, R, R + \frac{i\xi}{2a}, -R + \frac{i\xi}{2a}$ parcouru dans le sens direct.

On a le dessin:



On a donc :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{-az^2} dz &= \int_{-R}^R e^{-ax^2} dx + \int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2a}} e^{-a(R+t)^2} dt \\ &\quad - \int_{-R}^R e^{-a(x + \frac{\sqrt{\pi}}{2a})^2} dx - \int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2a}} e^{-a(-R+t)^2} dt \\ &= I_1(R) + I_2(R) - I_3(R) - I_4(R). \end{aligned}$$

$$\text{On : } \lim_{R \rightarrow +\infty} I_1(R) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

par définition de l'intégrale de Gauss

De plus :

$$\begin{aligned} |I_2(R)| &\leq \int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2a}} |e^{-a(R^2 + 2Rt + t^2)}| dt \\ &\leq \int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2a}} e^{-a(R^2 - t^2)} dt \\ &\leq e^{-aR^2} \int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2a}} e^{-at^2} dt \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \lim_{R \rightarrow +\infty} I_2(R) = 0$$

Avec le même raisonnement, on obtient que $\lim_{R \rightarrow +\infty} I_4(R) = 0$

$$\begin{aligned} |I_4(R)| &\leq \int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2a}} |e^{-a(R^2 - 2Rt - t^2)}| dt \\ &\leq \int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2a}} e^{-a(R^2 - t^2)} dt \leq e^{-aR^2} \int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2a}} e^{-at^2} dt \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Il reste à étudier $I_3(R)$

$$\text{On l'intégrale généralisée } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x + \frac{\sqrt{\pi}}{2a})^2} dx$$

converge absolument donc on peut passer à la

$\int_{-R}^R x dx = 0$ mais $\int_{-\infty}^{+\infty} x dx = +\infty$ (car l'intégrale impropre ne cv pas donc on peut pas mettre la limite aux deux bornes).

limite quand $R \rightarrow +\infty$ dans les bornes.

En effet,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \left| e^{-a(x + \frac{iy}{2a})^2} \right| dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left| e^{-a(x^2 + i\frac{y}{a}x - \frac{y^2}{4a^2})} \right| dx \\ &= e^{\frac{y^2}{4a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} dx \end{aligned}$$

et cette intégrale cv car $a > 0$ donc c'est un $O(\frac{1}{x^2})$ quand $x \rightarrow \pm\infty$

Donc: $\lim_{R \rightarrow +\infty} I_2(R) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x + \frac{iy}{2a})^2} dx$

Or la fonction $z \mapsto e^{-az^2}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, et le contour $\Gamma(R)$ est un chemin fermé, donc d'après le théorème de Cauchy,

$$\int_{\Gamma(R)} e^{-az^2} dz = 0$$

Finalement:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x + \frac{iy}{2a})^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

On obtient donc:

$$\hat{f}(y) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{y^2}{4a}}$$

BR: Prop calcul de l'intégrale de Gauss

26.1 On calcule l'intégrale $A = \int_{(\mathbb{R}^+)^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$ de deux manières.

• D'après le théorème de Fubini-Tonelli, on a que: $A = \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy \right) = \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2$

$$(x, y) = \ell(r, \theta)$$

• D'autre part, on fait le changement en coordonnées polaires (on sait que (x, y) peut être une forme des coordonnées ~~(x, y)~~ d'un nombre complexe avec $x = r \cos(\theta)$ et $y = r \sin(\theta)$ avec $r > 0$ et $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

Ainsi on a un C^1 -difféomorphisme:

$$\ell: \mathbb{R}_+^* \times]0, \frac{\pi}{2}[\rightarrow (\mathbb{R}_+^*)^2$$

$$(r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

On a:

$$\det \text{Jac } \ell(r, \theta) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix}$$

$$= r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r$$

Donc:

$$A = \int_0^{\pi/2} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r \, dr \, d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[-\frac{e^{-r^2}}{2} \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Finalement: } \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\text{Par parité: } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Remarques:

1) On peut alors retrouver la fonction caractéristique de la loi normale $\mathcal{N}(r, \sigma^2)$

En effet, si $X \sim \mathcal{N}(r, \sigma^2)$ alors

$$\phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = e^{itr} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

On le veut.

Déjà si $X \sim \mathcal{N}(r, \sigma^2)$ alors

$$\phi_X(t) = e^{itr} \phi_Y(\sigma t) \text{ où } Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

On peut donc se ramener à calculer ϕ_Y pour $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$. La densité de Y est :

$$f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

Or la fonction caractéristique est, à un signe près, la transformée de Fourier.

Donc : $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\phi_Y(t) = \mathbb{E}[e^{-itY}]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} e^{-itx} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} e^{-itx} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}_a(t) \quad \text{avec} \quad a = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\pi} \exp\left(-\frac{t^2}{4 \times \frac{1}{2}}\right)$$

$$= e^{-t^2/2}$$

2) On peut aussi montrer la formule en utilisant une équation-diff : on applique le théorème de dérivation sous le signe intégrale puis on fait une IPP

3) On peut aussi montrer la formule par prolongement analytique : on regarde $F(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{zx} e^{-x^2/2} dx$, on applique le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale, on calcule sur l'axe des réels, on applique le théorème de prolongement analytique, on regarde pour $z = -it$.