

Léçons:
103, 206, 108

Equivalence des normes:

Dans un evn de dim. finie toutes les normes sont équivalentes

Théorème de Riesz: fermé

la boule unité d'un evn est compact si cette evn est dim. finie.

Références

[Gours]: Goursat,
Analyse

Pour l'équivalence des normes: ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) p. 50 [Gours]

Prenons E un K -ev de dim. finie et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Pour $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$ on définit la norme $N_0(x) = \sup_{i \in \{1, \dots, n\}} |x_i|$

Le but va être de montrer que toutes les normes sont équivalentes à N_0 .

Prenons alors N une norme quelconque sur E .

• Hyp il existe $a \in \mathbb{R}$ tq $N(x) \leq a N_0(x)$

$$N(x) \leq \sum_{i=1}^n N(x_i e_i) = \sum_{i=1}^n |x_i| N(e_i) \\ \leq N_0(x) \sum_{i=1}^n N(e_i) =: a$$

(*)

• Hyp il existe $b \in \mathbb{R}$ tq $b N_0(x) \leq N(x)$.

$\rightarrow$ Hyp $\varphi: (K^n, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (E, N)$ est une isométrie continue

φ est bien une isométrie, en effet:

$$N_0\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sup_{i \in \{1, \dots, n\}} |x_i| = \|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty$$

$\rightarrow$ Hyp $\varphi(S_{\|\cdot\|_\infty}(0,1))$ est compact

L'image par φ de la sphère unité de $(K^n, \|\cdot\|_\infty)$ est $S = \{x \in E \mid N_0(x) = 1\}$
(car φ est une isométrie donc conserve les distances)

S est compact car la sphère unité de K^n est compact (car fermé borné de K^n , le caractère fermé vient du fait que l'application norme est continue (car l'ij)

$\rightarrow$ Hyp $N: (E, N_0) \rightarrow (\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ est continue

on a: $|N(x) - N(y)| \leq N(x-y)$ (2nd ineq trig)

$$\leq a N_0(x-y)$$

Donc $N: (E, N_0) \rightarrow (\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ est continue car a -lip.

→ conclusion en utilisant le thm des bornes atteintes

Puisque S est compact de $(E, \| \cdot \|_0)$ et $N: (E, \| \cdot \|_0) \rightarrow (R, | \cdot |)$ est continue,

Alors $\exists x_0 \in S$ tq $N(x_0) = \inf_{x \in S} N(x) := b$. (Donc $\forall x N(x) \geq N(x_0)$)

Donc $\forall x \in E, x \neq 0$,

$$N(x) = N \left(\frac{N_0(x)}{N_0(x)} \cdot x \right)$$

$$= N_0(x) N \left(\frac{x}{N_0(x)} \right)$$

$$\geq N_0(x) b$$

Donc $\alpha N_0(x) \geq N(x) \geq N_0(x) b$

Pon transitivity toutes les normes sur E sont équivalentes. $\square$

Pour le théorème de Riesz p. 56 CGOOS

$\Rightarrow$ Si E est de dimension finie, alors les fermés bornés sont compacts. Or $\overline{B_E(0,1)}$ est fermé borné donc compact

(Si le temps démontrer que les fermés bornés sont compacts)

$\Leftarrow$ Par contre, prenons E de dimension infini.

Par l'exemple supposons que $\overline{B_E(0,1)}$ est compact.

Donc $\exists x_1, \dots, x_n \in E$ tq $\overline{B_E(0,1)} \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, 1)$.

Prenons $F = \text{vect}(x_1, \dots, x_n)$, Puisque E de dim. infini, $\exists x \in E$ tq $x \notin F$.
 F est un evr de dim. finie donc F est fermé, donc $\exists y \in F$ tq

$$\|x - y\| = d(x, F).$$

Prenons $x_0 = \frac{x-y}{\|x-y\|}$ et onq $d(x_0, F) = 1$
en particulier pour $0 \in F$.

$$d(x_0, F) = \inf_{y \in F} \|x_0 - y\| \stackrel{!}{=} \|x_0 - 0\| = \|x_0\| = 1$$

$\forall z \in F,$

$$\|x_0 - z\| = \left\| \frac{x-y}{\|x-y\|} - z \right\| \quad \frac{1}{\|x-y\|} \|x-y\| + \dots$$

$$= \frac{1}{\|x-y\|} \|x-y - \|x-y\| z\|$$

$$= \frac{1}{\|x-y\|} \|x - (y + \underbrace{\|x-y\| z}_{\in F})\|$$

$$\geq \frac{1}{\|x-y\|} d(x, F) = 1$$

Donc en particulier $d(x_0, F) \geq 1$

Donc $d(x_0, F) = 1$.

Or $x_0 \in \bar{B}_E(0, 1)$ (ce de norme 1)

Donc $\exists ! \quad \forall x_0 \in B_E(x_i, 1)$

Donc $d(x_0, x_i) < 1$ ce qui est absurde car

$$1 = d(x_0, F) \leq d(x_0, x_i)$$

↙

□

Remarques:

- Savoir que les compacts de $\mathbb{R} / \mathbb{R}^n$ sont les fermés bornés.
- Savoir que sur de dim. finie fermé.
- Savoir que fermé borné compact en dim. finie.