

Léçons:

205, 228, 235, 246

Thm: projection sur un convexe fermé

Soit U un Hilbert et $C \subset U$ convexe fermé non vide.

Alors pour $x \in U$, il existe un unique $y \in C$ tq

$$\|x - y\| = \text{dist}(x, C)$$

On dit que $y = P_C(x)$ est la projection de x sur C .

y est caractérisé par $\text{Re}(\langle x - y, z - y \rangle) \leq 0$ pour $z \in C$

Références:

LIS: Li, Analyse fonctionnelle.

V2

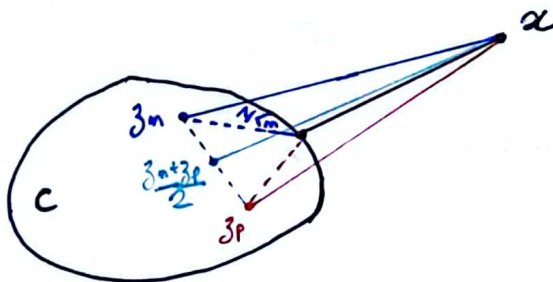
Pour le théorème, LIS p.32

• Pour l'existence,

Notons $d := \text{dist}(x, C)$. Remarquons que si $d = 0$ alors $x \in C$ (car C est fermé) et donc $y = x$ convient.

→ Définissons (z_n) qui approche d

Pour $n \geq 1$ il existe $z_n \in C$ tq $\|x - z_n\|^2 \leq d^2 + \frac{1}{n}$
(ce qui est possible par caractérisation séquentielle de la borne inf.).



→ Appliquons l'identité du parallélogramme pour $m, p \in \mathbb{N}^*$ (z_n) est de Cauchy

Identité du parallélogramme: $u, v \in U$, $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$ [LIS p.32]

Prenons $u = x - z_n$ et $v = x - z_p$ où $n, p \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\underbrace{\|x - z_n + x - z_p\|^2 + \|x - z_n - (x - z_p)\|^2}_{(1)} = 2(\|x - z_n\|^2 + \|x - z_p\|^2) \quad (*)$$

$$(1) = \|2x - z_n + z_p\|^2 + \|z_n - z_p\|^2$$

$$= 4\left\|x - \frac{z_n + z_p}{2}\right\|^2 + \|z_n - z_p\|^2$$

Puisque C est convexe on a $\frac{z_n + z_p}{2} \in C$

Donc

$$(1) \geq 4d^2 + \|z_m - z_p\|^2.$$

Alors en reprenant (*),

$$\begin{aligned} 4d^2 + \|z_m - z_p\|^2 &\leq 2(\|x - z_m\|^2 + \|x - z_p\|^2) \quad (*) \\ &\leq 2\left(d^2 + \frac{1}{m} + d^2 + \frac{1}{p}\right) \end{aligned}$$

$$\cancel{4d^2} + \|z_m - z_p\|^2 \leq \cancel{4d^2} + \frac{1}{m} + \frac{1}{p}$$

On en déduit alors que (z_m) est de Cauchy

→ Conclusions

C est un fermé dans H un Hilbert donc C est complet.
De plus (z_m) est une suite de Cauchy d'éléments de C ,
donc (z_m) converge vers un certain $y \in C$.

En reprenant la définition de (z_m) , en faisant $m \rightarrow \infty$
on a $\|x - y\| \leq d$ or $y \in C$ donc $\|x - y\| = d$.

• Unicité:

Soient $y_1, y_2 \in C$ 2 projections de x .
En reprenant (*):

$$\cancel{4d^2} + \|y_1 - y_2\|^2 \leq 2(\|x - y_1\|^2 + \|x - y_2\|^2) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} y_1, y_2 \text{ projections} \\ = \cancel{4d^2}$$

Donc $\|y_1 - y_2\|^2 \leq 0$, d'où $y_1 = y_2$.

• Pour la caractérisation

→ Pour $\Rightarrow$, prenons $y = p_C(x)$

Pour $z \in C$ $(1-t)y + tz \in C$ pour $t \in [0,1]$ car C est convexe.

Donc

$$\begin{aligned} \|x - (1-t)y - tz\|^2 &\geq \|x - y\|^2 \\ \text{ie } \|x - y + ty - tz\|^2 &\geq \|x - y\|^2 \\ \text{ie } \|x - y + t(y - z)\|^2 &\geq \|x - y\|^2 \end{aligned}$$

finalement on a

$$\|x-y\|^2 + t^2 \|y-z\|^2 + 2t \operatorname{Re}(\langle x-y, y-z \rangle) \geq \|x-y\|^2$$

Si $t=0$ c'est ok.

Si non, en divisant par t on a

$$t \|y-z\|^2 + \operatorname{Re}(\langle x-y, y-z \rangle) \geq 0$$

$$t \|y-z\|^2 - \operatorname{Re}(\langle x-y, z-y \rangle) \geq 0$$

En faisant tendre t vers 0 on a :

$$-\operatorname{Re}(\langle x-y, z-y \rangle) \geq 0$$

on en déduit l'implication.

→ Pour $\square$, réciproquement supposons que y vérifie
 $\operatorname{Re}(\langle x-y, z-y \rangle) \leq 0$ pour $z \in C$.

Prendons $z \in C$

$$\begin{aligned} \|x-z\|^2 &= \|(x-y) + (y-z)\|^2 \\ &= \|x-y\|^2 + \operatorname{Re}(\langle x-y, y-z \rangle) + \|y-z\|^2 \\ &= \|x-y\|^2 + \|y-z\|^2 - \underbrace{\operatorname{Re}(\langle x-y, z-y \rangle)}_{\geq 0} \\ &\geq \|x-y\|^2 \end{aligned}$$

on a le résultat pour tout $z \in C$ donc $y = p_C(x)$.

□

Commentaires :

→ Savoir montrer la projection sur un ser fermé :

| Soit F un ser fermé de H ; pour $x \in H$ on a :

$y = p_F(x)$ soit $y \in F$ et $x-y \in F^\perp$

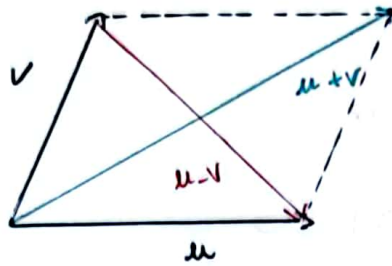
[LIS p.35]

→ Savoir mq :

| Soit F ser de H , $H = \overline{F} \oplus F^\perp$. [LIS p.36]

→ Savoir montrer thm de représentation de Riesz. [LIS p.38]

→ savoir faire le dessin de l'identité du parallélogramme



→ savoir que p_C est 1-lip [LIS p.34]

Montrons Représentation de Riesz,

Théorème : Représentation de Riesz

$$J: H \rightarrow H^*$$

est une isométrie surjective

$$y \mapsto \phi_y; x \mapsto \langle x, y \rangle$$

• Pour l'isométrie [LIS p.30]

On $\phi_y = \|y\|$, prenons $y \neq 0$.

$$|\phi_y(x)| \leq \|y\| \|x\| \text{ par Cauchy-Schwarz}$$

$$\text{Donc } \|\phi_y\| \leq \|y\|$$

$$\text{Or } \phi_y(y) = \|y\|^2 \text{ et } \|\phi_y\| = \sup_{x \in H, \|x\|=1} |\phi_y(x)| \geq \frac{|\phi_y(y)|}{\|y\|} = \|y\|$$

• Pour la surjectivité [LIS p.34]

Soit $\phi \in H^*$, puisque ϕ est continue $\text{Ker}(\phi)$ est un ser fermé

$$\text{D'où } H = \text{Ker}(\phi) \oplus \underbrace{\text{Ker}(\phi)^\perp}_{\text{de dim. 1.}}$$

Prenons $u \in \text{Ker}(\phi)^\perp$ tq $\|u\|=1$. Prenons $y = \overline{\phi(u)}u$. Puisque $y \in \text{Ker}(\phi)^\perp$.
On a que ϕ_y est nulle sur $\text{Ker} \phi$, et :

$$\phi_y(u) = \langle u, \overline{\phi(u)}u \rangle = \phi(u) \|u\|^2 = \phi(u)$$

$$\text{Donc } \phi = \phi_y.$$

□