

Leçons:

230, 241, 243, 245

Théorème: Cauchy triangulaire

Soit $\mathcal{R}$ un ouvert de $\mathbb{C}$. Prenons $\Delta = \Delta(u, v, w)$
un triangle plein dans $\mathcal{R}$. Soit $a \in \mathcal{R}$, prenons
 $f \in \mathcal{H}(\mathcal{R} \setminus \{a\})$. Si γ est le bord du triangle
orienté positivement en a : (f continue sur $\mathcal{R}$)
$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Références
LQVES: Queffelec,
Analyse complexe.

Théorème: Cauchy pour un convexe

Soient $\mathcal{R}$ un ouvert convexe de $\mathbb{C}$,
 $a \in \mathcal{R}$ et $f \in \mathcal{H}(\mathcal{R} \setminus \{a\})$ et continue sur $\mathcal{R}$.
Alors,

(i) f admet une primitive, i.e., il existe
 $F \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$ tq $F'(z) = f(z)$ pour $z \in \mathcal{R}$.

(ii) Pour toutes courbes fermées γ tq
 $\gamma^* \subset \mathcal{R}$, on a $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

Théorème: Cauchy local

Soient $\mathcal{R}$ un ouvert de $\mathbb{C}$, $\overline{D}(a, r)$
un disque fermé contenu dans $\mathcal{R}$
de bord positivement orienté par γ
où $\gamma(t) = a + re^{it}$ tq $t \in [0, 2\pi]$.

Prenons $f \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$, alors

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad \text{où } z \in D(a, r)$$

et pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} dw \quad \text{où } z \in D(a, r)$$

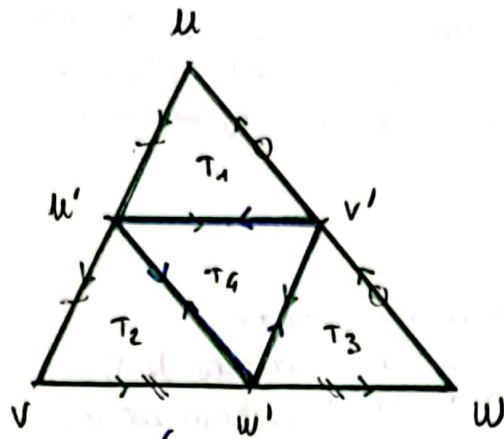
Corollaire:

Si $f \in \mathcal{H}(\mathcal{R})$ alors $f \in \mathcal{A}(\mathcal{R})$.

Pour Cauchy triangulaire, LQVES p. 101-103

• Si $a \notin \Delta$

→ On va faire un découpage de Δ pour obtenir une majoration
de $|I|$, où $I = \int_{\gamma} f(z) dz$:



On a donc
$$I = \sum_{i=1}^4 \int_{\partial T_i} f(z) dz$$

Donc parmi ces triangles il en existe un tel que $\int_{\partial T_i} f(z) dz \geq \int_{\partial T_i} |f(z)| dz$ pour $i \in \{1, \dots, 4\}$. Notons alors Δ_1 ce triangle.

On a :

$$\left| \int_{\partial \Delta_1} f \right| \geq \frac{1}{4} |I|$$

En répétant cette construction sur Δ_1 on obtient une suite de triangle $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tq :

$$\Delta_1 \supset \dots \supset \Delta_n \supset \dots \quad \text{et} \quad \left| \int_{\partial \Delta_n} f(z) dz \right| \geq \frac{1}{4^n} |I|$$

→ On va montrer que cette suite de triangle tend vers un point

En notant L le périmètre de Δ , on a que :

$$\partial \Delta_n = L \frac{1}{2^n}$$

En notant d le diamètre de Δ (le diamètre d'un triangle c'est la longueur du plus grand côté), on a :

$$\text{diam}(\Delta_n) = d \frac{1}{2^n}$$

On a que (Δ_n) est une suite décroissante de fermé, donc d'après le théorème des fermés emboîtés, les Δ_n ont un unique point commun z_0 .

Puisque $a \notin \Delta$ on $z_0 \neq a$ donc f est holomorphe en z_0 :

On peut alors écrire $f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + \rho(z)(z - z_0)$ où $\lim_{z \rightarrow z_0} \rho(z) = 0$

→ On va maintenant majorer I pour des ε

Prenons $\varepsilon > 0$ il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tq $|f(z)| \leq \varepsilon$ où $z \in \Delta_n$.

Donc,
$$\int_{\partial \Delta_n} f(z) dz = \int_{\partial \Delta_n} f(z_0) dz + \int_{\partial \Delta_n} (z - z_0) f'(z_0) dz + \int_{\partial \Delta_n} f(z) (z - z_0) dz$$

$$= \int_{\partial \Delta_n} f(z) (z - z_0) dz$$

car $z \mapsto f(z_0)$ et $z \mapsto (z - z_0) f'(z_0)$ sont holomorphes et $\partial \Delta_n$ chemin fermé.

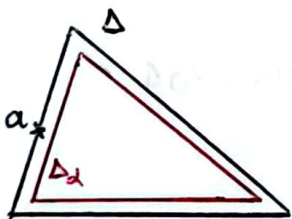
En reprenant la majoration $|I| \frac{1}{4^n} = \left| \int_{\partial \Delta_n} f(z) dz \right|$, on a :

$$\begin{aligned} |I| \frac{1}{4^n} &\leq \int_{\partial \Delta_n} |f(z) (z - z_0)| dz \\ &\leq \sup_{z \in \Delta_n} |f(z) (z - z_0)| \times L(\partial \Delta_n) \\ &\leq \varepsilon \frac{d}{2^n} \frac{L}{2^n} \end{aligned}$$

Donc $|I| \leq \varepsilon dL$ pour tout $\varepsilon > 0$ donc $|I| = 0$ et ainsi $I = 0$.

• Si a est sur un côté du triangle

Prenons $\alpha \in]0, 1[$ tq $\Delta_\alpha \subset \Delta$ où



$\alpha \in \Delta_\alpha$ donc par ce qui précède,

$$\int_{\partial \Delta_\alpha} f(z) dz = 0$$

En faisant $\alpha \rightarrow 1^-$ on obtient, par continuité de f , que $I = 0$

En effet : (à ne pas faire à l'oral)

Si on note $\partial \Delta_\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ le chemin orienté positivement sur le bord du triangle Δ_α .

On a
$$\int_{\partial \Delta_a} f(z) dz = \int_a^b f(\partial \Delta_a(t)) \partial \Delta_a'(t) dt$$

Or
$$|f(\partial \Delta_a(t)) \partial \Delta_a'(t)| \leq \sup_{z \in \Delta} |f(z)| \sup_{z \in \Delta} |z|$$

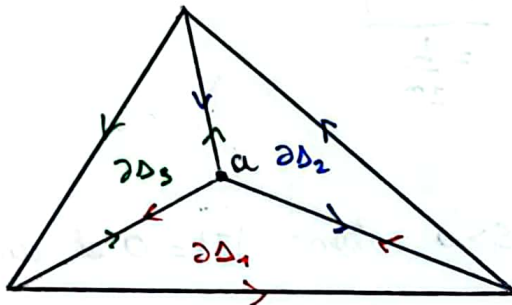
car Δ compact et f continue sur Δ

Donc par convergence dominée

$$\underbrace{\int_{\partial \Delta_a} f(z) dz}_{=0} \xrightarrow{a \rightarrow 1^-} \underbrace{\int_{\partial \Delta} f(z) dz}_{=I}$$

Donc $I = 0$.

• Si a est dans le triangle Δ



On a
$$I = \sum_{i=1}^3 \underbrace{\int_{\partial \Delta_i} f(z) dz}_{=0 \text{ d'après 1er cas}} = 0$$

□

Pour Cauchy sur un convexe, [QUE] p.103-104

• Définissons les bons objets

→ Définissons f

Puisque Ω est convexe, on a pour $z \in \Omega$ $[a, z] \subset \Omega$ et f est continue sur $[a, z]$, on peut alors définir

$$f(z) = \int_{[a, z]} f(w) dw \quad \text{pour } z \in \Omega.$$

→ Construisons un triangle

Prenons $h \in \mathbb{C}$ tq $z+h \in \Omega$, le triangle $\Delta(a, z, z+h)$ est inclus dans Ω .

• Montrer que $f \in H(\mathbb{R})$

→ On va essayer de faire apparaître un taux d'accroissement

On a :

$$\int_{\Delta(a, z, z+h)} f = \int_{[a, z]} f + \int_{[z, z+h]} f + \int_{[z+h, a]} f$$

Et par Cauchy triangulaire :

$$\int_{\Delta(a, z, z+h)} f = 0$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_{[z, z+h]} f &= - \int_{[z, a]} f - \int_{[a, z+h]} f \\ &= \int_{[a, z+h]} f = F(z+h) - F(z) \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} (f(w) - f(z)) dw \quad \left(\int_{[z, z+h]} f(z) dw = h f(z) \right)$$

→ Montrer que cette quantité tend vers 0

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tq $|w - z| \leq \delta$ implique que $|f(w) - f(z)| \leq \varepsilon$

Prendons $|h| \in [0, \delta]$ (quitte à réduire δ), on a :

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| &\leq \frac{1}{|h|} \int_{[z, z+h]} |f(w) - f(z)| dw \\ &\leq \frac{1}{|h|} \varepsilon \times |h| \end{aligned}$$

Donc $f \in H(\mathbb{R})$ et $F'(z) = f(z)$, d'où (i), puisque f admet une primitive alors $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ car γ fermé, d'où (ii) □

Pour Cauchy local, [QUES] p.105

• Définissons une bonne fonction

Soit $R > r$ tq $\Omega_1 := D(a, R) \subset \Omega$. Prenons $z \in D(a, r)$ et posons

$$g: \Omega_1 \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$w \longmapsto \begin{cases} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} & \text{si } w \neq z \\ f'(z) & \text{sinon.} \end{cases}$$

g est continue sur Ω_1 , holomorphe sur $\Omega_1 \setminus \{z\}$ et Ω_1 convexe.

• Appliquons alors Cauchy convexe

$$\int_{\gamma} g(w) dw = 0, \text{ car } \int_{\gamma} g(w) dw = \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw - f(z) \int_{\gamma} \frac{1}{w - z} dw$$

(le cas $w = z$ est de mesure nulle).

D'où

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw = f(z) \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{1}{w - z} dw$$

$$= \text{Ind}_{\gamma}(z) = 1$$

$$= f(z)$$

□

Pour le corollaire, [QUES] p.105

On a $f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw$

$$= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - a) - (z - a)} dw$$

$$= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - a) \left(1 - \frac{z - a}{w - a}\right)} dw$$

$|w - a| = r$
et $|z - a| < r$
donc $\left|\frac{z - a}{w - a}\right| < 1$
car S.E.
conv

$$= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(w) \frac{1}{w - a} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{z - a}{w - a}\right)^n dw$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (z - a)^n \underbrace{\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - a)^{n+1}} dw}_{=: c_n(a)}$$

□

Commentaires

- Savoir mq $f \in \mathcal{H}(U) \Rightarrow f \in \mathcal{H}(\Omega)$
- Savoir montrer fermé emboîté