

leçons:
223, 224, 236

Proposition: Formule de Wallis

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} \underbrace{\left(\frac{2p(2p-2) \dots 2}{(2p-1)(2p-3) \dots 1} \right)^2}_{\alpha_p^2} = \pi$$

Proposition: Formule de Stirling

$$n! \sim k \sqrt{n} n^n e^{-n} \quad k = \sqrt{2\pi}$$

Références:
[Gours: Goursdon,
Analyse 3 ed.]

Pour la formule de Wallis, [Gours p.130]

• Trouvons une expression de I_n en fonction de I_{n-2} :

On pose $I_n := \int_0^{\pi/2} \sin^n(x) dx$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Remarquons que $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$.

Pour $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{u'} \frac{\sin^{n-1}(x)}{v} dx \\ &= \underbrace{\left[-\cos(x) \sin^{n-1}(x) \right]_0^{\pi/2}}_{=0} + \int_0^{\pi/2} \cos(x) \left((n-1) \cos(x) \sin^{n-2}(x) \right) dx \\ &= (n-1) \int_0^{\pi/2} \cos^2(x) \sin^{n-2}(x) dx \\ &= (n-1) \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}(x) dx}_{=I_{n-2}} - (n-1) \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin^n(x) dx}_{=I_n} \end{aligned}$$

$\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$

Donc $n I_n = (n-1) I_{n-2}$ d'où $I_n = \frac{(n-1)}{n} I_{n-2}$

• Trouvons une expression de I_{2p} pour $p \geq 1$

$$\begin{aligned} I_{2p} &= \frac{2p-1}{2p} I_{2p-2} \\ &= \frac{2p-1}{2p} \frac{2p-3}{2p-2} I_{2p-4} \\ &\vdots \\ &= \frac{(2p-1)(2p-3) \dots 1}{2p(2p-2) \dots 2} I_0 \\ &= \frac{(2p-1)!!}{(2p)!!} \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

• Trouvons une expression de I_{2p-1} pour $p \geq 1$

$$I_{2p+1} = \frac{2p}{2p+1} I_{2p-1}$$

$$= \frac{2p}{2p+1} \frac{2p-2}{2p-1} I_{2p-3}$$

$$= \dots$$

$$= \frac{2p(2p-2)(2p-4) \dots 2}{(2p+1)(2p-1) \dots 1} I_1$$

$$= 1$$

• Dédoublons alors la formule de Wallis

Soit $p \geq 1$.

Pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$0 \leq \sin^{2p+1}(x) \leq \sin^{2p}(x) \leq \sin^{2p-1}(x)$$

En intégrant de 0 à $\frac{\pi}{2}$

$$0 \leq I_{2p+1} \leq I_{2p} \leq I_{2p-1}$$

En divisant par I_{2p+1} on a :

$$1 \leq \frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} \leq \frac{I_{2p-1}}{I_{2p+1}}$$

Donc $1 \leq \frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} \leq \frac{2p+1}{2p}$

$$\xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{>1}$$

D'où $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{I_{2p}}{I_{2p+1}} = 1$ ce qui donne la formule de Wallis □

Pour la formule de Stirling, [G003 p. 219]

Prenons pour $n \geq 1$ $u_n := \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!}$

• Montrons que u_n converge vers une constante k

→ H_1 la série de terme général $v_n := \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge

$$|v_n| = \left| \ln \left(\frac{(n+1)^{n+1} e^{-(n+1)} \sqrt{n+1} n!}{n^n e^{-n} \sqrt{n} (n+1)!} \right) \right|$$

$$= \left| \ln \left(\frac{(n+1)^n (n+1)^{1/2} (n+1)! e^{-1}}{n^n n^{1/2} (n+1)!} \right) \right|$$

$$= \left| \ln \left(\left(\frac{n+1}{n} \right)^{n+\frac{1}{2}} e^{-1} \right) \right|$$

$$= \left| -1 + \left(n + \frac{1}{2} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right|$$

$$= \left| -1 + \left(n + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) \right|$$

$$= \left| -1 + \cancel{-1} + \cancel{\frac{1}{2n}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) + \cancel{\frac{1}{2n}} \right|$$

$$= O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Donc $|V_n| = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, par comparaison de séries à termes positifs
 $\sum |V_n|$ converge donc $\sum V_n$ converge absolument, notons λ
 sa limite.

→ Déduisons de ça que (u_n) converge

$$\sum_{k=1}^n V_k = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) = \ln(u_n)$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = \lambda$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \underbrace{e^\lambda}_{=: k}$

De là on en déduit que $n! \sim k \sqrt{n} n^n e^{-n}$. (*)

• Déterminons k

Prenons $d_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{2n(2n-2) \dots 2}{(2n-1)(2n-3) \dots 1} = \frac{2^n n!}{\sqrt{n} (2n)!}$

→ Appliquons la "formule" de Stirling pour trouver $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n$

On trouve $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = \sqrt{\pi}$

→ Hy $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = \frac{k}{\sqrt{2}}$

Remarquons que $d_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{(2^n n!)^2}{(2n)!}$ en multipliant par $2n(2n-2) \dots 2$
 au numérateur et au dénominateur.

Mais alors avec (*) on a :

$$\begin{cases} 2^{2m} (m!)^2 \sim 2^{2m} k^2 m m^{2m} e^{-2m} \\ \sqrt{m} (2m!) \sim \sqrt{m} k \sqrt{2m} (2m)^{2m} e^{-2m} \end{cases}$$

Par quotient d'équivalent on a

$$d_m \sim \frac{\cancel{2^{2m}} k^2 \cancel{m} \cancel{m^{2m}} \cancel{e^{-2m}}}{k \sqrt{2m} \cancel{2^{2m}} \cancel{m} \cancel{m^{2m}} \cancel{e^{-2m}}}$$

$$\text{Donc } \lim_{m \rightarrow +\infty} d_m = \frac{k}{\sqrt{2}}$$

• Conclusions par unicité de la limite

$$\text{On a } \frac{k}{\sqrt{2}} = \sqrt{\pi} \quad \text{donc } k = \sqrt{2\pi}.$$

□