

$$(S): \begin{cases} x' = ax - bxy \\ y' = -cy + dxy \end{cases}$$

avec conditions initiales $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0$

où $t_0 \in \mathbb{R}$, admet une unique solution maximale définie sur $\mathbb{R}$.

Si $x_0, y_0 > 0$ alors $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$ pour $t \in \mathbb{R}$
De plus $t \mapsto (x(t), y(t))$ est périodique

Etude du système, CBERS p. 137

• H₁ il existe une ^{unique} solution maximale

En posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $f(X) = \begin{pmatrix} ax - bxy \\ -cy + dxy \end{pmatrix}$

on cherche à résoudre $X' = f(X)$, car f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ donc f est localement lipschitzienne, donc par Cauchy-Lipschitz
(S) admet une unique solution maximale $(I, (x, y))$ aux conditions initiales (x_0, y_0) .

• H₂ $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$ pour $t \in I$

possible car $x_0 > 0$
 $x(t) \leq 0$ donc par
continuité x + TVI on trouve t_1

Raisonnons par l'absurde, on a qu'il existe t_1, t_2 $x(t_1) = 0$.
Alors $t \mapsto (0, y(t)e^{-c(t-t_1)})$ est solution de (S) et coïncide avec (x, y) en t_1 , donc par unicité de la solution et maximalité de (x, y) sur I on a que ces 2 solutions coïncident sur I donc en particulier en t_0 donc $x_0 = 0$. ABSURDE.

De même pour y .

• H₃ $I = \mathbb{R}$, pour cela on va m_g (x, y) est bornée

→ Déterminons une intégrale première

$$\begin{cases} x' = x(a - by) \\ y' = y(-c + dx) \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \frac{x'}{x} = a - by \\ \frac{y'}{y} = -c + dx \end{cases}$$

Donc $\frac{x'}{x}(-c + dx) = \frac{y'}{y}(a - by)$

Donc $-\frac{c}{x} + d - \frac{a}{y} + by' = 0$

Donc $U: (x, y) \mapsto -c \ln(x) + dx - a \ln(y) + by$
est une intégrale première de (S).

Passons pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $F_{\alpha, \beta}: u \mapsto \beta u - \alpha \ln(u)$, ainsi

$U(x, y) = F_{\alpha, d}(x) + F_{c, b}(y)$

$\rightarrow$ H_y $F_{\alpha, d}$ et $F_{c, b}$ admettent un unique minimum

Pour $u > 0$ on a :

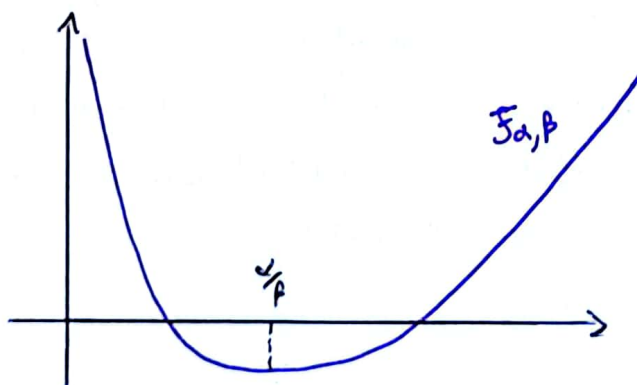
$F'_{\alpha, d}(u) = d - \frac{\alpha}{u}$

Donc,

$F''_{\alpha, d}(u) = \frac{\alpha}{u^2} > 0$ donc $F_{\alpha, d}$ est convexe et donc

admet un unique minimum atteint en $\frac{\alpha}{d}$.

De même $F_{c, b}$ admet un unique minimum en $\frac{c}{b}$



$\rightarrow$ obtenons que x et y sont bornés

(x, y) est dans une ligne de niveau de U , c'est à dire qu'il existe k une constante tel

$U(x(t), y(t)) = F_{\alpha, d}(x(t)) + F_{c, b}(y(t)) = k$

Donc $F_{\alpha, d}(x(t)) \leq k - \min(F_{c, b})$ (*)

On obtient alors que x est bornée, en effet si ce n'était pas le cas on aurait :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{E}_{a,d}(x(t)) = +\infty \text{ par continuité de } \mathcal{E}_{a,d}$$

ce qui contredit (*).

De même pour y .

→ Obtenons que $I = \mathbb{R}$

(x, y) est bornée donc par l'énoncé des bouts $I = \mathbb{R}$.

• Montrer que $t \mapsto (x(t), y(t))$ est périodique

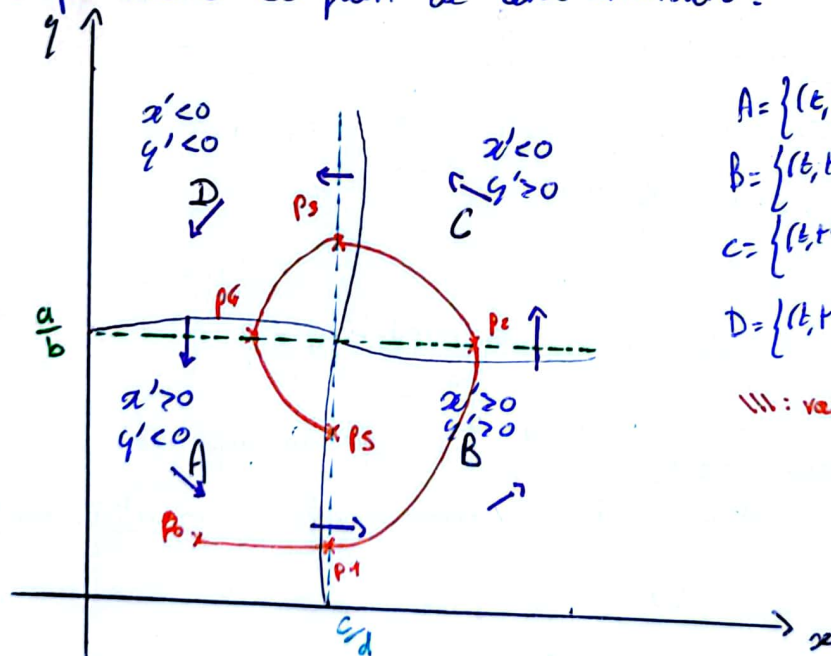
→ Étudions les isoclines verticales pour obtenir les points stationnaires

$$I_1 = \{(x, y) \mid ax - by = 0\} = \{(x, y) \mid x(a - by) = 0\} = \{x = 0\} \cup \{y = \frac{a}{b}\}$$

$$I_2 = \{(x, y) \mid -cy + dx = 0\} = \{(x, y) \mid y(dx - c) = 0\} = \{y = 0\} \cup \{x = \frac{c}{d}\}$$

Leurs points d'intersection sont $(0, 0)$ et $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$

On découpe alors le plan de cette manière :



$$A = \{(t, t') \mid 0 \leq x(t) < \frac{c}{d} \text{ et } 0 \leq y(t) < \frac{a}{b}\}$$

$$B = \{(t, t') \mid \frac{c}{d} \leq x(t) \text{ et } 0 < y(t) < \frac{a}{b}\}$$

$$C = \{(t, t') \mid \frac{c}{d} < x(t) \text{ et } \frac{a}{b} \leq y(t)\}$$

$$D = \{(t, t') \mid 0 < x(t) \leq \frac{c}{d} \text{ et } \frac{a}{b} < y(t)\}$$

/// : voir + laim.

A partir de (S) on connaît la direction globale du champ de vecteurs (représentée par les flèches sur le dessin).

→ H₄ qu'on peut passer d'une zone à l'autre

Supposons que $(x_0, y_0) \in A$, montrons qu'on peut arriver en B

Raisonnons par l'absurde, supposons que pour tout $t > t_0$, $(x(t), y(t)) \in A$.

* H₄ x et y ont une limite en $+\infty$

Puisque $(x(t), y(t)) \in A$ on a que $x'(t) > 0$ et $y'(t) \leq 0$.
Donc x et y sont monotones, de plus elles sont bornées
donc par théorème de la limite monotone x et y ont une limite en $+\infty$.

* H₄ x et y convergent vers un point stationnaire

À l'aide (S) on en déduit que x' et y' ont une limite en $+\infty$.
Cette limite est forcément nulle puisque x et y sont bornées.

Donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} (x'(t), y'(t)) = 0$, or
$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) - bx(t)y(t) \\ y'(t) = -cy(t) + dx(t)y(t) \end{cases}$$

Donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} (ax(t) - bx(t)y(t), -cy(t) + dx(t)y(t)) = 0$

Donc (x, y) converge vers un point stationnaire.

* Trouvons l'absurdité

Par croissance de x , $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) > x_0 > 0$

Donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t), y(t)) = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b} \right)$

Par décroissance de y , $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) \leq y_0 \leq \frac{a}{b}$

• Si $y_0 < \frac{a}{b}$, on a l'absurdité car d'après $y(t) \nearrow \frac{a}{b}$

• Si $y_0 = \frac{a}{b}$, alors $y(t) = \frac{a}{b}$ pour $t > t_0$, on a

$$\begin{aligned} x'(t) &= ax(t) - bx(t)y(t), \quad t > t_0 \\ &= ax(t) - bx(t)\frac{a}{b} \\ &= 0 \end{aligned}$$

ce qui est absurde car $x'(t) > 0$

* Conclusions

On peut alors passer de A à B.

Par un raisonnement similaire on peut passer de B à C à D à A.

Prenez $(t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < t_5)$ les instants où la trajectoire de (x, y) passe d'une zone à l'autre : (à part t_0 qui est p_{10})

$$\left\{ \begin{array}{l} (x(t_0), y(t_0)) \in A \\ p_1 := (x(t_1), y(t_1)) \in B \\ p_2 := (x(t_2), y(t_2)) \in C \\ p_3 := (x(t_3), y(t_3)) \in D \\ p_4 := (x(t_4), y(t_4)) \in A \end{array} \right.$$

→ Pour avoir la périodicité m_y $p_1 = p_5$

c'est à $y(t_1) = y(t_5)$ (cf dessin) (nécessaire^{ment} $x(t_1) = x(t_5)$)

Ces points $(x(t_1), y(t_1))$ et $(x(t_5), y(t_5))$ appartiennent à la trajectoire de (x, y) donc à une ligne de niveau de H , donc

$$\begin{aligned} F_{a,d}(x(t_1)) + F_{c,b}(y(t_1)) &= H(x(t_1), y(t_1)) \\ &= H(x(t_5), y(t_5)) \\ &= F_{a,d}(x(t_5)) + F_{c,b}(y(t_5)) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } F_{c,b}(y(t_1)) = F_{c,b}(y(t_5)) \quad (*)$$

Or $p_1, p_5 \in B$ donc $y(t_1), y(t_5) < \frac{a}{b}$.

Or $F_{c,b}$ est ^{strictement} décroissante sur $]0, \frac{a}{b}[$ donc $F_{c,b}$ est injective

Donc avec (*) on en déduit $y(t_1) = y(t_5)$. D'où la périodicité!

□