

Leçons:
218, 223, 229, 226

Suite définie par réc:

Soit $b > 0$ et $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Si

- (i) f continue
- (ii) f croissante
- (iii) $\forall x \in]0, b[$, $f(x) < x$ et $f(0) = 0$
- (iv) $\exists \lambda > 0$ et $r > 1$ tq

$$f(x) = x - \lambda x^r + o(x^r) \quad x \rightarrow 0, x \in]0, b[$$

Pour $c \in]0, b[$, la suite (u_n) définie par $u_0 = c$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

$$u_n \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad u_n \sim \frac{K}{n^{\frac{1}{r-1}}} \quad \text{où} \quad K = (\lambda(r-1))^{\frac{1}{1-r}}$$

Application:

$u_{n+1} = \arctan(u_n)$ et $u_0 \in \mathbb{R}$ on a:

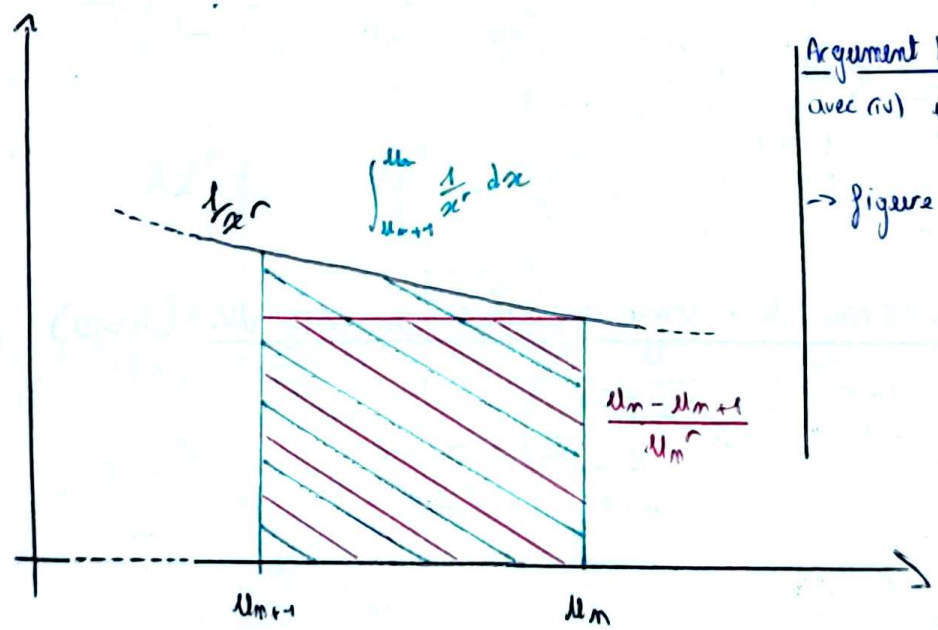
$$u_n = \sqrt{\frac{3}{2n}} + \frac{3\sqrt{3}}{40\sqrt{2}} \frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}}\right)$$

références:
[BERS: Bernis, Analyse
10 de p. 145

BERS p. 145
• $M_f(u_n) \subset]0, b[$

f est $\nearrow$, si $\exists y \in]0, b[$ tq $f(y) = 0$ alors $\forall x \in]0, y[$, $f(x) < x$ (car $f(x) < x$)
ce qui contredit le DL. Donc $\forall x \in]0, b[$, $0 < f(x) \leq x < b$.
Donc $(u_n) \subset]0, b[$.

• $M_f(u_n) \rightarrow 0$, avec (iii) on a que $(u_n) \searrow$ et minoré par 0 (car $(u_n) \subset]0, b[$)
Donc (u_n) cv. vers $\ell \in [0, b]$. Or f est continue donc ℓ point fixe
de f . Puisque pour $x \in]0, b[$ $f(x) < x$ et $f(0) = 0$, nécessairement $\ell = 0$.



Argument heuristique de la découverte de l'éq.

avec (iv) $\frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^r} \sim \lambda (1)$

$\rightarrow$ figure $\frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^r} \sim \int_{u_{n+1}}^{u_n} \frac{1}{x^r} dx$

expliquer
à la
fin si
le temps

• Montrons l'équivalent (1):

$$u_{n+1} = f(u_n) = u_n - \lambda u_n^r + o(u_n^r) \quad (\text{car } u_n \rightarrow 0)$$

me pas faire

Donc
$$\frac{u_{n+1} - u_n}{u_n^r} = -\lambda + o(1)$$

D'où
$$\frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^r} \sim \lambda$$

• Or le dessin suggère que
$$\frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^r} \sim \lambda \quad \sim \int_{u_{n+1}}^{u_n} \frac{1}{t^r} dt$$

Or
$$\int_{u_{n+1}}^{u_n} \frac{1}{t^r} dt = \frac{1}{1-r} (u_n^{1-r} - u_{n+1}^{1-r})$$

$$= \frac{1}{1-r} (u_n^{1-r} - (u_n - \lambda u_n^r + o(u_n^r))^{1-r})$$

$$= \frac{1}{1-r} (u_n^{1-r} - (u_n (1 - \lambda u_n^{r-1} + o(u_n^{r-1})))^{1-r})$$

$$= \frac{1}{1-r} (u_n^{1-r} - u_n^{1-r} (1 - \lambda u_n^{r-1} + o(u_n^{r-1}))^{1-r})$$

$$= \frac{1}{1-r} u_n^{1-r} (1 - (1 - \lambda u_n^{r-1} + o(u_n^{r-1}))^{1-r})$$

$$= \frac{u_n^{1-r}}{1-r} (1 - (1 - \lambda u_n^{r-1} + o(u_n^{r-1}))^{1-r})$$

$$= \frac{u_n^{1-r}}{1-r} (1 - (1 - (1-r)\lambda u_n^{r-1} + o(u_n^{r-1})))$$

$$= \frac{u_n^{1-r}}{1-r} (1 - 1 + (1-r)\lambda u_n^{r-1} + o(u_n^{r-1}))$$

$$= \lambda u_n^{1-r} + o(u_n^{1-r})$$

H-1
= 1.

Donc
$$\int_{u_{n+1}}^{u_n} \frac{1}{t^r} dt = \frac{u_n^{1-r} - u_{n+1}^{1-r}}{1-r} \sim \lambda$$

• Donc par équivalence de terme général de série dv. ($\lambda > 0$)

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{u_k^{1-r} - u_{k+1}^{1-r}}{1-r} \sim \sum_{k=0}^{n-1} \lambda = \lambda n$$

$$\frac{1}{1-r} (u_0^{1-r} - u_n^{1-r})$$

Or u_0^{1-r} négligeable devient u_m^{1-r}

$$\text{On a } \frac{-u_m^{1-r}}{1-r} \sim \lambda_m$$

$$\text{Donc } u_m^{1-r} \sim (r-1)\lambda_m$$

$$\text{Donc } u_m \sim ((r-1)\lambda_m)^{\frac{1}{1-r}} = \frac{1}{((r-1)\lambda_m)^{\frac{1}{r-1}}}$$

dire "en simplifiant, on a le résultat"

Application: (pas de ref, mais on peut s'inspirer de l'ex d'appel de ZBERS p 146)

On prend $f = \arctan$

i) $\arctan$ est continue sur $\mathbb{R}$

ii) $\arctan$ est $\nearrow$

iii) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \arctan(x) < x$ (en effet $\frac{1}{1+x^2} - 1 < 0$) et $\arctan(0) = 0$

iv) $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

ex: $u_m \sim \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{m}} = \sqrt{\frac{3}{2m}} \quad (\lambda = \frac{1}{3} \quad r = 3)$

On refait ce qu'on a fait mais un palet + bois

$$\frac{u_{m+1}^{-2}}{\arctan(u_m)} - u_m^{-2} = \left(u_m - \frac{u_m^3}{3} + \frac{u_m^5}{5} + o(u_m^5) \right)^{-2} - u_m^{-2}$$

$$\sqrt{(1+x)^2} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

$$\stackrel{\arctan(x)}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5) = \left(u_m \left(1 - \frac{u_m^2}{3} + \frac{u_m^4}{5} + o(u_m^4) \right) \right)^{-2} - u_m^{-2}$$

$$= u_m^{-2} \left(\left(1 - \frac{u_m^2}{3} + \frac{u_m^4}{5} + o(u_m^4) \right)^{-2} - 1 \right)$$

$$\alpha = -2, \alpha = -\left(\frac{u_m^2}{3} - \frac{u_m^4}{5}\right)$$

$$= u_m^{-2} \left(1 - (-2) \left(\frac{u_m^2}{3} - \frac{u_m^4}{5} \right) + \frac{(-2)(-3)}{2} \frac{u_m^4}{3^2} + o(u_m^4) \right)$$

$$= u_m^{-2} \left(\frac{2u_m^2}{3} - \frac{2u_m^4}{5} + \frac{u_m^4}{3} + o(u_m^4) \right)$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{2u_m^2}{5} + \frac{u_m^2}{3} + o(u_m^2)$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{15}u_m^2 + o(u_m^2)$$

• Posons $x_n := u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2} - \frac{2}{3}$ et trouvons un équivalent

$$x_n \sim -\frac{u_n^2}{15}$$

eq du début

$$n - \frac{1}{15} \frac{3}{2^n} \sim -\frac{1}{10(n+1)} \sim -\frac{1}{10(n+1)}$$

• Faisons une somme télescopique pour trouver un DL de u_n^{-2}

$$\text{Or } \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1}^{-2} - u_k^{-2} = \sum_{k=0}^{n-1} (x_k + \frac{2}{3})$$

$$= u_n^{-2} - u_0^{-2} = \sum_{k=0}^{n-1} x_k + n \frac{2}{3}$$

$$\sim -\frac{1}{10} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+1} + n \frac{2}{3}$$

on a $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+1} \sim \ln(n)$

$$\sim -\frac{1}{10} \ln(n) + \frac{2n}{3} + o(\ln(n))$$

Donc

$$u_n^{-2} = \frac{2n}{3} - \frac{1}{10} \ln(n) + o(\ln(n))$$

• Simplifions pour obtenir le résultat

Donc

$$u_n = \left(\frac{2n}{3} - \frac{1}{10} \ln(n) + o(\ln(n)) \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{2n}{3} \left(1 - \frac{3}{20} \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \right) \right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2n}} \left(1 + \frac{3}{40} \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \right)$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2n}} + \frac{3\sqrt{3}}{40\sqrt{2}} \frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}}\right)$$

$$= 3\sqrt{3}$$

$$40 = 8 \times 5$$

$$= 2^3 \times 5$$

$$= 2^2 \times 2 \times 5$$

□