Leçons :	Théorème :	Références :
213, 219, 229, 253	Soit H un Hilbert et $J : H \to \mathbb{R}$ convexe, continue, coercive. Alors il existe $a \in H$ tq $J(a) = \inf_{x \in H} J(x)$.	[ISE] : Isenman, oral à l'agreg. [CIA] : Ciarlet, ana num. [HIR] : Hirsch, Analyse fonctionnelle.
	V2	

Pour le théorème, [ISE]

Prenons une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de H tq $J(x_k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \inf_{x\in H} J(x)$

• Mq (x_k) est borné

Raisonnons par l'absurde, supposons que (x_k) n'est pas borné.
Il existe φ une extractrice tq $\|x_{\varphi(k)}\| \to +\infty$.
Donc par coercivité de J,

$$J(x_{\varphi(k)}) \longrightarrow +\infty$$

ce qui contredit la définition de (x_k). D'où l'absurdité.

• On va mq il existe une extractrice φ tq $\langle u, x_{\varphi(k)}\rangle \to \langle u, a\rangle$ pour tout $u \in H$

→ Construisons l'extractrice (On la construit par rec)

• Pour tout $k \in \mathbb{N}$, en utilisant Cauchy-Schwartz on a :

$$|\langle x_0, x_k\rangle| \leq \|x_0\| \, \|x_k\|$$

Donc (puisque (x_k) est bornée) on a que $(\langle x_0, x_k\rangle)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Or d'après Bolzano-Weierstrass, il existe une extractrice φ_0 tq $(\langle x_0, x_k\rangle)_{k\in\mathbb{N}}$ converge.

• Par récurrence, on suppose que $\varphi_0, \dots, \varphi_i$ sont construites tq $(\langle x_i, x_{\varphi_0\circ\dots\circ\varphi_i(k)}\rangle)$ cv. Construisons φ_{i+1}

Par un raisonnement similaire on a que $(\langle x_{i+1}, x_{\varphi_0\circ\dots\circ\varphi_i(k)}\rangle)$ est borné. Donc par Bolzano-Weierstrass il existe une extractrice φ_{i+1} tq $\langle x_{i+1}, x_{\varphi_0\circ\dots\circ\varphi_{i+1}(k)}\rangle$ cv.

• Ainsi on a crée une suite d'extractrice $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Posons $\psi : k \mapsto \varphi_0\circ\dots\circ\varphi_k(k)$

On a alors que $(\langle x_i, x_{\varphi(k)}\rangle)$ converge pour tout $i \in \mathbb{N}$, car $\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_k$ est une suite extraite de $\varphi_0 \circ \dots \circ \varphi_i$ pour $k \geq i$.

→ Mq pour tout $u \in H$, $(\langle u, x_{\varphi(k)}\rangle)$ cv

Posons $F := \text{vect}\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ et notons pour $k \in \mathbb{N}$ $y_k := x_{\varphi(k)}$

Par linéarité à gauche du produit scalaire, on a que pour tout $v \in F$ $(\langle v, x_{\varphi(k)}\rangle)$ converge.

Or H est un Hilbert, donc $H = \bar{F} \oplus F^\perp$.

On va mq $(\langle u, y_k\rangle)$ est de Cauchy.

Prenons $u \in H$ tq $u = v + w$ où $v \in \bar{F}$ et $w \in F^\perp$

Puisque $v \in \bar{F}$, prenons $\varepsilon > 0$ et $\tilde{v} \in F$ tq $\|v - \tilde{v}\| \leq \varepsilon$.

Il existe $N \in \mathbb{N}$ tq pour $k, p \geq N$ $|\langle \tilde{v}, y_k - y_p\rangle| \leq \varepsilon$ (car $\tilde{v} \in F$ donc $(\langle \tilde{v}, y_k\rangle)$ cv)

$$
\begin{aligned}
|\langle u, y_k\rangle - \langle u, y_p\rangle| &= |\langle u, y_k - y_p\rangle| \\
&= |\langle v + w, y_k - y_p\rangle| \\
&= |\langle v, y_k - y_p\rangle + \underbrace{\langle w, y_k - y_p\rangle}_{=0 \text{ car } w \in F^\perp}| \\
&= |\langle v - \tilde{v} + \tilde{v}, y_k - y_p\rangle| \\
&\leq |\langle v - \tilde{v}, y_k - y_p\rangle| + |\langle \tilde{v}, y_k - y_p\rangle| \\
&\leq \underbrace{\|v - \tilde{v}\|}_{\leq \varepsilon} \|y_k - y_p\| + \underbrace{|\langle \tilde{v}, y_k - y_p\rangle|}_{\leq \varepsilon} \\
&\leq \varepsilon(\|y_k\| + \|y_p\|) + \varepsilon \\
&\leq 2\varepsilon c + \varepsilon
\end{aligned}
$$

(y_k) bornée, on note c sa borne.

Donc $(\langle u, y_k\rangle)$ est de Cauchy dans H qui est un Hilbert donc $(\langle u, y_k\rangle)$ converge, notons l_u sa limite.

→ Déterminons qui est l_u en utilisant le thm de représentation de Riesz

Posons $f : H \to \mathbb{R}$
$u \mapsto l_u$

- Par linéarité de $x \mapsto \langle x, y_k\rangle$ et l'unicité de la limite on en déduit que f est une forme linéaire.

• f est continue, en effet

$$
\begin{aligned}
|f(u)| &= \lim_{k\to+\infty} |\langle u, y_k\rangle| \\
&\leq \lim \|u\| \, \|y_k\| \\
&\leq \|u\| \, C
\end{aligned}
$$

Ainsi d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique $a \in H$ tq pour tout $u \in H$ $f(u) = \langle u, a\rangle$.

Finalement il existe une extractrice φ tq pour tout $u \in H$ $\langle u, x_{\varphi(k)}\rangle \longrightarrow \langle u, a\rangle$.

• Mq $\inf_H J$ est atteint en a

Prenons $\beta > \inf_H J$, et posons $C_\beta := \{x \in H \mid J(x) \leq \beta\}$

→ Appliquons le théorème de projection sur C_β

. C_β est convexe car J est convexe.
. C_β est fermé en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue.

Par thm de projection la distance de H à C_β est réalisée en un point, notons $p : H \to C_\beta$ la projection sur C_β

→ Utilisons la caractérisation de la projection pour conclure

On sait que $J(x_k) \to \inf_H J$, donc $J(y_k) \to \inf_H J$.
Donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tq pour tout $k \geq N$, $J(y_k) \leq \beta$
Donc pour $k \geq N$ $y_k \in C_\beta$.

Par caractérisation de la projection on a :

$$\langle \underset{\in H}{a} - p(a), \underset{\in C_\beta}{y_k} - p(a)\rangle \leq 0$$

Or pour tout $u \in H$ $\langle u, y_k\rangle \to \langle u, a\rangle$.
Donc

$$\langle a - p(a), a - p(a)\rangle = \|a - p(a)\|^2 \leq 0.$$

Donc $a = p(a)$ et ainsi $a \in C_\beta$

C'est à dire que pour tout $\beta > \inf_H J$, $J(a) \leq \beta$

On en déduit alors que $J(a) = \inf_H J$

$\square$

__Commentaires:__

- Pour le 2ème point de la démo on peut pas faire "Soit $u \in H$, $(\langle u, x_k \rangle)$ bornée donc par Bolzano - Weierstrass il existe φ tq $(\langle u, x_{\varphi(k)} \rangle)$ converge" En faisant on a un " $\forall u \dots, \exists \varphi$" alors qu'on veut " $\exists \varphi \dots, \forall u$ ".

- Le 2ème point n'est pas spécifique à (x_n) mais est vrai pour toute suite bornée (de toutes suites bornée on peut extraire une sous suite faiblement convergente).

- En notant $\phi_n(y) := \langle x_n, y \rangle$ on a $(\phi_n(y))$ bornée pour tout y donc par Banach-Steinhaus (ϕ_n) bornée.

- $x_n \to x \Rightarrow x_n \xrightarrow{w} x$
- $x_n \xrightarrow{w} x \Rightarrow (\|x_n\|)$ bornée et $\|x\| \leq \underline{\lim} \|x_n\|$
- $x_n \xrightarrow{w} x$ et $\|x_n\| \to x \Rightarrow x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$

- On peut démontrer point fixe de Browder avec premier.
- [ISE] interdit jour de l'oral (en tout cas 1ère ed) dans [CIA] il y a toutes les idées de la démo, ou dans [HIR] il y les idées de la démo du 2nd point.

Scanné avec CamScanner