

Leçons:
235, 236, 239, 250

Lemme:

Soit $b > 0$.

$$\mathcal{F}(x \mapsto e^{-bx^2}) = \xi \mapsto \sqrt{\frac{\pi}{b}} e^{-\xi^2/4b}$$

Références:
ZELINS: El Amrani,
Analyse de Fourier

Théorème 1: Formule de dualité

Preons $f, g \in L^1(\mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}} f(u) \hat{g}(u) du = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(u) g(u) du$$

Théorème 2: Injectivité de la TF.

$$\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{R}) \text{ est injective}$$

$$f \longmapsto \hat{f}$$

V2

Pour le lemme 1, (pas de ref. pour la démo mais le résultat est dans [ZELINS p. 412])

Preons $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$
 $(\alpha, \xi) \mapsto e^{-b\alpha^2} e^{-i\alpha\xi}$

• On peut dériver sous $\int_{\mathbb{R}} f(\alpha, \xi) d\alpha$

• Pour $\xi \in \mathbb{R}$, $\alpha \mapsto f(\alpha, \xi)$ est intégrable (car $\int_{\mathbb{R}} e^{-b\alpha^2} d\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{b}}$)

• Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\xi \mapsto f(\alpha, \xi)$ est dérivable

• Pour $\alpha, \xi \in \mathbb{R}$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \alpha}(\alpha, \xi) \right| = \left| -i\xi e^{-b\alpha^2} e^{-i\alpha\xi} \right|$$

$$\leq |\xi| e^{-b\alpha^2} = o\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)$$

On a donc une majoration intégrable indépendante de ξ .

On peut alors bien dériver.

• Servons nous de ça pour obtenir une équ. diff.

$$\mathcal{F}(x \mapsto e^{-bx^2})'(\xi) = - \int_{\mathbb{R}} i\xi e^{-b\alpha^2} e^{-i\alpha\xi} d\alpha$$

$$= \frac{i}{2b} \int_{\mathbb{R}} \frac{-2b e^{-b\alpha^2}}{u'} \frac{e^{-i\alpha\xi}}{u} d\alpha$$

$$= \frac{i}{2b} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-bax^2} e^{-ia\xi} dx - \frac{i}{2b} \int_{\mathbb{R}} e^{-bax^2} (-i\xi) e^{-ia\xi} d\xi$$

$$= \frac{-\xi}{2b} \mathcal{F}(a \mapsto e^{-bax^2})(\xi)$$

On a alors une equa. diff. de la forme:

$$y'(t) + \frac{t}{2b} y(t) = 0$$

• Conclusions:

$$\text{Donc } \mathcal{F}(a \mapsto e^{-bax^2})(\xi) = c e^{-\frac{\xi^2}{4b}}$$

En prenant $\xi = 0$ on trouve $c = \sqrt{\frac{\pi}{b}}$

D'où le résultat □

Preuve la formule de dualité, [ELAM] p. 115

• Appliquons Fubini - Tonelli:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f(u)| \left| \int_{\mathbb{R}} g(v) e^{-iuv} dv \right| du &\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(u)| |g(v)| dv du \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(u)| du \int_{\mathbb{R}} |g(v)| dv \\ &= \|f\|_1 \|g\|_1 < \infty \end{aligned}$$

• On peut alors appliquer Fubini - Lebesgue

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(u) \left(\int_{\mathbb{R}} g(v) e^{-iuv} dv \right) du &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(u) e^{-iuv} du g(v) dv \\ &= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(v) g(v) dv \end{aligned}$$

□

Pour l'injectivité, CEANS p. 115

Puisque $\mathcal{F}$ est linéaire on va chercher à déterminer $\text{Ker}(\mathcal{F})$
Prenons alors $f \in \text{Ker } \mathcal{F}$ (ie $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $\hat{f} = 0$)

• Définissons une fonction $g_\Delta: x \mapsto \gamma_\Delta(x) e^{iax}$
où $a \in \mathbb{R}$ est fixé et $\gamma_\Delta: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta}} e^{-\frac{x^2}{2\Delta}}$ le noyau de Gauss.

• Montrons que $f * \sqrt{\frac{2\pi}{\Delta}} \gamma_{\frac{\Delta}{2}}(u) = 0$

→ Remarquons que $\hat{g}_\Delta(x) = \hat{\gamma}_\Delta(x-a)$; en effet

$$\begin{aligned}\hat{g}_\Delta(x) &= \int_{\mathbb{R}} \gamma_\Delta(u) e^{iax} e^{-iux} du \\ &= \int_{\mathbb{R}} \gamma_\Delta(u) e^{-iu(x-a)} du \\ &= \hat{\gamma}_\Delta(x-a)\end{aligned}$$

→ Appliquons la formule de dualité pour obtenir $f * \hat{\gamma}_\Delta(x) = 0$

$$\text{On a } \int_{\mathbb{R}} f(u) \hat{g}_\Delta(u) du = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\hat{f}(u)}_{=0} \hat{g}_\Delta(u) du = 0$$

$$\begin{aligned}\text{Or } \int_{\mathbb{R}} f(u) \hat{g}_\Delta(u) du &= \int_{\mathbb{R}} f(u) \hat{\gamma}_\Delta(u-a) du \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(u) \hat{\gamma}_\Delta(a-u) du \quad \left. \begin{array}{l} \text{parité de } \gamma_\Delta \end{array} \right\} \\ &= f * \hat{\gamma}_\Delta(u)\end{aligned}$$

→ Calculons $\hat{\gamma}_\Delta(u)$

$$\hat{\gamma}_\Delta(u) = \int_{\mathbb{R}} \gamma_\Delta(u) e^{-iux} du$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{u^2}{2\Delta}} e^{-iau} du \quad \left. \vphantom{\int_{\mathbb{R}}} \right\} \text{lemme} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta}} \sqrt{2\pi\Delta} e^{-\frac{a^2\Delta}{2}} \\
 &= \sqrt{\frac{2\pi}{\Delta}} \underbrace{\sqrt{\frac{\Delta}{2\pi}}}_{=\delta_{1/\Delta}(a)} e^{-\frac{a^2\Delta}{2}}
 \end{aligned}$$

D'où $f * \sqrt{\frac{2\pi}{\Delta}} \delta_{1/\Delta}(a) = 0$ pour tout $\Delta > 0$.

• Conclusions:

$(\delta_{1/\Delta})_{\Delta > 0}$ est une approximation de l'unité

Donc $f * \delta_{1/\Delta} \xrightarrow[\Delta \rightarrow +\infty]{\|\cdot\|_1} f$ et donc par continuité de la norme en a :

$$0 = \lim_{\Delta \rightarrow +\infty} \underbrace{\|f * \delta_{1/\Delta} - f\|_1}_{=0} = \|f\|_1$$

Donc $f = 0$

□

Commentaires:

→ Savoir moy $\int_{\mathbb{R}} e^{-bx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{b}}$ (coord polaire, analyse complexe)

→ Savoir moy $(\delta_{1/\Delta})_{\Delta > 0}$ est une approx. unité

→ $\mathcal{F} = \mathcal{L}^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ surj? Non, prendre f impaire dans $\mathcal{L}^1$,

$$\phi(a) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(t)}{t} dt \quad \left(\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t) \frac{1}{t} dt = \int_0^{+\infty} f(x) \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(xu)}{u} du dx < \infty \right)$$

prendre $g(x) = \frac{\arctan(x)}{\ln(2+x^2)} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ sq g est la TF de f ($\hat{f} = g$)

on a que f est impaire, $\frac{g(x)}{x} \sim \frac{\pi}{4 \ln(x)}$ pas intégrable en $+\infty$ mais avec $\odot$ on a la contradiction.

(Je crois qu'on peut aussi le faire par Banach-Steinhaus)