

Développement : Suite de polygones

Étienne PEILLON

Le développement suivant consiste à montrer qu'une suite de polygones converge, ce qui met notamment en jeu le calcul du déterminant d'une matrice circulante.

Théorème

Soit $\mathcal{P}$ un polygone à n côtés, assimilé à un n -uplet $(z_i)_{i=1,\dots,n} \in \mathbb{C}^n$ et $a, b \in]0, 1[$ avec $a + b = 1$. On définit la suite de polygone $(\mathcal{P}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ avec $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_{k+1}$ est le polygone à n côtés dont les sommets sont les barycentres pondérés par (a, b) des arêtes de $\mathcal{P}_k$. La suite $(\mathcal{P}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers l'isobarycentre de $\mathcal{P}$.

Ce résultat passe par le calcul suivant.

Lemme

Soient $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Alors

$$\det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_0 \end{pmatrix} = \prod_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{jk}.$$

Ce développement reprend les idées de [CP22] et [IP24].

Le recasage est le suivant :

- ***** 153 : Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications.
- ***** 226 : Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence $un+1=f(un)$. Exemples. Applications à la résolution approchée d'équations.
- **** 152 : Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.
- **** 191 : Exemples d'utilisation de techniques d'algèbre en géométrie.
- *** 150 : Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.
- *** 149 : Déterminant. Exemples et applications.
- *** 181 : Convexité dans $\mathbb{R}^n$. Applications en algèbre et en géométrie.

Les trois derniers recasages sont assez discutables.

Développement

Partie 1 : calcul du déterminant circulant. On note C la matrice circulante, et J la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Si $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ est la base canonique, alors on a $Je_i = e_{i-1}$ pour $i > 1$ et $Je_1 = e_n$. Ainsi, avec $k \leq n$, $J^k e_i = e_{i-k}$ pour $i > k$ et $J^k e_i = e_{i-k+n}$ pour $i \leq k$, de sorte que

$$J^k = \begin{pmatrix} 0 & \text{Id}_{n-k} \\ \text{Id}_k & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalement, on a $C = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k$. On diagonalise J .

Remarque

Il y a deux manières de diagonaliser J . Soit on de la définition de valeur propre, soit on part de l'égalité $J^n = \text{Id}$. L'avantage de la première est de mettre immédiatement en évidence le lien entre une valeur propre et un vecteur propre associé, tandis que la seconde permet d'expédier la question à condition de connaître les vecteurs propres.

Première méthode : soient $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre et $X = (x_i)_{i=1,\dots,n}$ un vecteur propre associé, de sorte que $JX = \lambda X$, de sorte que

$$\begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_1 = \lambda x_n \end{cases} \implies \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \begin{cases} x_k = \lambda^k x_1 \\ x_k = \lambda^n x_k \end{cases}.$$

Ainsi, on observe que les valeurs propres de J sont racines n -ièmes de l'unité, et on vérifie que si $\omega \in \mathbb{U}_n$ alors $\sum_{k=1}^n \omega^{k-1} e_k$ est un vecteur propre de J associé à ω .

Seconde méthode : le polynôme $X^n - 1$ annule J donc son polynôme minimal est scindé à racines simples donc J est diagonalisable et ses valeurs propres sont contenues dans $\mathbb{U}_n$. On vérifie que $\sum_{k=1}^n \omega^{k-1} e_k$ est un vecteur propre de J associé à $\omega \in \mathbb{U}_n$.

On constate que J admet n valeurs propres distinctes, donc est diagonalisable et il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et $D = \text{diag}(1, \omega, \dots, \omega^{n-1})$ avec $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ de sorte que $J = PDP^{-1}$. Finalement,

$$\det(C) = \det \left(P \sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k P^{-1} \right) = \prod_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} a_k \omega^{jk}.$$

À noter que la matrice P est formées des vecteurs propres de J , de sorte sa première colonne puisse être choisie égale à ${}^t(1, 1, \dots, 1)$.

Remarque

En fait, P peut être choisie comme la matrice de Vandermonde suivante

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \cdots & \omega^{(n-1)^2} \end{pmatrix}.$$

Partie 2 : modélisation réduction. On assimile le polygone $\mathcal{P}_k$ au n -uplet de nombre complexes $Z_k = \left(z_i^{(k)} \right)_{i=1, \dots, n}$. La relation entre les polygones $\mathcal{P}_{k+1}$ et $\mathcal{P}_k$ induit la relation matricielle $Z_{k+1} = C_{a,b} Z_k$ avec

$$C_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a & b \\ b & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix},$$

de sorte qu'on ait $Z_k = C_{a,b}^k Z_0$. Ainsi, étudier la convergence des polygones revient à étudier le comportement de la suite matricielle $(C_{a,b}^k)_{k \in \mathbb{N}}$, et en définitive il suffira de comparer le module des valeurs propres de $C_{a,b}$ avec 1 pour en tirer le comportement asymptotique de $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Remarque

Il y a plusieurs manières de diagonaliser $C_{a,b}$. Si on a diagonalisé la matrice circulante, le calcul est évident. Mais on peut alternativement calculer le polynôme caractéristique de $C_{a,b}$. En effet,

$$\chi_{C_{a,b}}(X) = \det(C_{a,b} - X \text{Id}) = \prod_{j=0}^{n-1} (a + b\omega^j - X).$$

Il reste néanmoins à calculer un vecteur propre associé à 1.

Par le calcul précédent, on a clairement

$$C_{a,b} = a \text{Id} + bJ = P \underbrace{(a \text{Id} + bD)}_{D_{a,b}} P^{-1}.$$

Ainsi, il apparaît clairement que les valeurs propres de $C_{a,b}$ sont $\lambda_j = (D_{a,b})_{jj} = a + b\omega^{j-1}$ pour $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. En notant $Y_k = P^{-1} Z_k$, on obtient que $Y_k = D_{a,b}^k Y_0$.

Partie 3 : Convergence et conclusion. Il ne reste plus qu'à étudier les valeurs propres. Si $j = 1$, alors $\lambda_1 = 1$. Sinon, $j > 1$ et

$$\begin{aligned} |\lambda_j|^2 &= |a + b\omega^{j-1}|^2 = a^2 + b^2 + 2ab \operatorname{Re}(\omega^{j-1}) \\ &= (a+b)^2 - 2ab(1 - \operatorname{Re}(\omega^{j-1})) = 1 - 2ab(1 - \operatorname{Re}(\omega^{j-1})) < 1. \end{aligned}$$

Ainsi, on a $\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_j^k = 0$,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} D_{a,b}^k = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & 0_{n-1,n-1} \end{pmatrix},$$

et $Y_\infty = \lim_{k \rightarrow +\infty} Y_k = \alpha^t(1, 0, \dots, 0)$. Finalement, on a $Z_\infty = \lim_{k \rightarrow +\infty} PY_k = \alpha^t(1, \dots, 1)$.

Par ailleurs, deux polygones consécutifs ont les mêmes isobarycentres. En effet, si z_G est l'affixe du barycentre, alors, comme $a + b = 1$,

$$nz_G = \sum_{i=1}^n z_i^{(k+1)} = \sum_{i=1}^n az_i^{(k)} + bz_{i+1}^{(k)} = \sum_{i=1}^n z_i^{(k)}.$$

Finalement, par convergence de la suite de polygones, on obtient que

$$z_G = \frac{1}{n} \lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n z_i^{(k)} = \alpha.$$

Références

- [CP22] Philippe Caldero and Marie Peronnier. Carnet de voyage en Algérie. Im-et-Ker. Calvage et Mounet, 2022.
- [IP24] Lucas Isenmann and Timothée Pecatte. L'oral à l'agrégation de mathématiques : une sélection de développements. Références sciences. Ellipses, 2024.

Annexe

On peut étendre le raisonnement au cas où la pondération du barycentre change à chaque polygone, comme proposé par [CP22] et [IP24]. Ainsi, on a le résultat suivant.

Proposition

Soit $\mathcal{P}$ un polygone à n côtés, assimilé à un n -uplet $(z_i)_{i=1,\dots,n} \in \mathbb{C}^n$ et deux suites réelles positives $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telles que $(a_k) + (b_k) = 1$. On définit la suite de polygones $(\mathcal{P}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ avec $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_{k+1}$ est le polygone à n côtés dont les sommets sont les barycentres pondérés par (a_k, b_k) des arêtes de $\mathcal{P}_k$.

Si la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k b_k$ diverge, alors la suite $(\mathcal{P}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers l'isobarycentre de $\mathcal{P}$.

Démonstration. Si on reprend les notations du développement, on a $Z_{k+1} = C_{a_k, b_k} Z_k$. Ainsi, en notant encore $Y_k = P^{-1} Z_k$, on a $Y_{k+1} = D_{a_k, b_k} Y_k$ où $D_{a_k, b_k} = a_k \text{Id} + b_k D$. Ainsi, comme toutes les matrices $(D_{a_k, b_k})_{k \in \mathbb{N}}$ commutent, on peut écrire

$$Y_{k+1} = \left(\prod_{j=0}^k D_{a_j, b_j} \right) Y_0.$$

Ainsi, si $Y_k = (y_j^{(k)})_{j=1,\dots,n}$, alors

$$y_j^{(k+1)} = \prod_{\ell=0}^k (a_\ell + b_\ell \omega^{j-1}) y_j^{(0)}.$$

En particulier, $y_1^{(k)} = y_1^{(0)}$. Il ne reste qu'à calculer les limites des autres composantes. De fait,

$$\left| \prod_{\ell=0}^k (a_\ell + b_\ell \omega^{j-1}) \right|^2 = \prod_{\ell=0}^k \left(1 + 2a_\ell b_\ell (1 - \text{Re}(\omega^{j-1})) \right),$$

et en passant au logarithme, et en utilisant la concavité du logarithme,

$$\begin{aligned}
 \ln \left| \prod_{\ell=0}^k (a_\ell + b_\ell \omega^{j-1}) \right|^2 &= \sum_{\ell=0}^k \ln \left(1 - 2a_\ell b_\ell (1 - \operatorname{Re}(\omega^{j-1})) \right) \\
 &\leq \sum_{\ell=0}^k -2a_\ell b_\ell (1 - \operatorname{Re}(\omega^{j-1})) \\
 &\leq -2(1 - \operatorname{Re}(\omega^{j-1})) \sum_{\ell=0}^k a_\ell b_\ell.
 \end{aligned}$$

Ainsi, comme $1 - \operatorname{Re}(\omega^{j-1}) > 0$ et que la série de termes positifs $\sum_{\ell=0}^k a_\ell b_\ell$ diverge, on a

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \ln \left| \prod_{\ell=0}^k (a_\ell + b_\ell \omega^{j-1}) \right|^2 = -\infty,$$

de sorte que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} y_j^{(k+1)} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \prod_{\ell=0}^k (a_\ell + b_\ell \omega^{j-1}) y_j^{(0)} = 0.$$

La conclusion suit comme dans le développement. □