

207
209
213
246

Densité des polynômes trigonométriques

- Analyse de Fourier,
El Amaani, p 172

ElA2 171 Déf: On note $C_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions continues et 2π -périodiques sur $\mathbb{R}$. Muni de $\|f\|_2 = \sup_{0 \leq x \leq 2\pi} |f(x)|$, et single d'un espace de Banach.

On munit $L^2_{2\pi}$ du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx$$

Déf: Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on désigne par e_n l'élément de $C_{2\pi}$ tel que : $e_n(x) = e^{inx}$. La famille $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est appelé système trigonométrique.

Théorème: Le système trigonométrique $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2_{2\pi}$.

Dém:

ElA1 292 On montre que le système est orthonormé.

Soit $n \in \mathbb{Z}$ on a :

$$\begin{aligned} \langle e_n, e_n \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{inx} \overline{e^{inx}} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 dx = 1 \end{aligned}$$

Soit $n, m \in \mathbb{Z}$ avec $n \neq m$. Alors :

$$\begin{aligned} \langle e_n, e_m \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{inx} \overline{e^{imx}} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{(n-m)ix} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{(n-m)ix}}{n-m} \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{n-m} (e^{2i(n-m)\pi} - 1) = 0 \end{aligned}$$

ELA2 On montre que la famille est totale

772 On rappelle qu'un polynôme trigonométrique est une combinaison linéaire finie d'éléments du système trigonométrique

Comme $\mathcal{L}_{2\pi}$ est dense dans $L_{2\pi}^2$, pour montrer le résultat, il suffit de montrer :

Pour tout $f \in \mathcal{L}_{2\pi}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique P tel que $\|f - P\|_2 \leq \varepsilon$

On si $g \in \mathcal{L}_{2\pi}$ alors

$$\|g\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(x)|^2 dx \leq \frac{1}{2\pi} \|g\|_\infty^2 \int_0^{2\pi} dx = \|g\|_\infty^2$$

$$\text{donc } \|g\|_2 \leq \|g\|_\infty$$

Ainsi il suffit d'établir que $\|f - P\|_2 \leq \varepsilon$.

On suppose qu'il existe des polynômes trigonométriques

Q_h avec $h \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$1) Q_h \geq 0 \text{ sur } \mathbb{R}$$

$$2) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q_h(x) dx = 1$$

$$3) (Q_h) \text{ CVU vers } 0 \text{ sur } [-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi] \\ \forall \delta > 0.$$

Soit $f \in \mathcal{L}_{2\pi}$. On définit alors :

$$P_h(x) = (f * Q_h)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-s) Q_h(s) ds \quad \forall h \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{et alors } P_h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) Q_h(x-s) ds$$

en faisant un changement de variable et par périodicité de f et Q_h

On Q_h est un polynôme trigonométrique donc

$$Q_h(x) = \sum_{n=-N_h}^{N_h} a_{n,h} e^{inx}$$

Alors :

$$\begin{aligned} P_h(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \sum_{n=-N_h}^{N_h} a_{n,h} e^{in(x-s)} ds \\ &= \sum_{n=-N_h}^{N_h} \left(\frac{a_{n,h}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-ins} ds \right) e^{inx} \end{aligned}$$

donc P_h est un polynôme trigonométrique.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$ et est 2π -périodique, d'après le théorème de Heine, elle est uniformément continue sur $[0, 2\pi]$.

Ainsi il existe $\delta > 0$ tel que $|s - x| < \delta$ implique $|f(x) - f(s)| < \varepsilon$.

On :

$$\begin{aligned} P_h(x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-s) Q_h(s) ds - f(x) \overbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q_h(s) ds}^{=1} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x-s) - f(x)] Q_h(s) ds \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} |P_h(x) - f(x)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-s) - f(x)| \overbrace{Q_h(s)}^{>0} ds \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |f(x-s) - f(x)| Q_h(s) ds \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |s| \leq \pi} |f(x-s) - f(x)| Q_h(s) ds \\ &\leq \textcircled{1} + \textcircled{2} \end{aligned}$$

Dans $\textcircled{1}$ on a que $|x-s-x| = |s| \leq \delta$ donc :

$$⑦ \leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \overset{\geq 0}{Q_h(s)} ds \leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q_h(s) ds \leq \varepsilon \times 1 = \varepsilon$$

On pose alors $\eta_h(s) = \sup_{\delta \leq |x| \leq \pi} Q_h(x)$ qui est bien défini car il s'agit du sup d'une fonction continue sur un compact.

Ainsi :

$$\begin{aligned} ⑧ &\leq \frac{1}{2\pi} \times 2\|f\|_{\infty} \times \eta_h(s) \times \int_{\delta \leq |x| \leq \pi} \overset{\leq 2\pi}{dx} \\ &\leq 2\|f\|_{\infty} \eta_h(s) \leq \varepsilon \quad \text{car d'après 3),} \\ &\quad \eta_h(s) \xrightarrow{h \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Comme ces inégalités sont indépendantes de n , on a donc :

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \|f - P_h\|_{\infty} = 0$$

Comme P_h est un polynôme trigonométrique, on a bien le résultat.

Il reste à construire les Q_h .

$$\text{On prend } Q_h(x) = c_h \cdot \left(\frac{1 + \cos x}{2} \right)^h$$

avec c_h de telle sorte que la condition 2) soit vérifiée.

Le point 1) est immédiat.

On comme Q_h est paire, on a :

$$1 = \frac{c_h}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1 + \cos x}{2} \right)^h dx$$

$$\geq \frac{c_h}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1 + \cos x}{2} \right)^h \sin(x) dx \quad \text{car } 0 \leq \sin(x) \leq 1 \text{ sur } [0; \pi]$$

$$\geq \frac{c_h}{\pi} \frac{1}{h+1} \left[(-2) \left(\frac{1 + \cos x}{2} \right)^{h+1} \right]_0^{\pi}$$

$$\geq \frac{2c_h}{\pi(h+1)}$$

△ on va dans le livre

Or Q_h est décroissante sur $[0; \pi]$ (car cos décroît)
donc $\forall 0 \leq \delta \leq |x| \leq \pi$ on a :

$$Q_h(x) \leq Q_h(\delta) = c_h \left(\frac{1 + \cos \delta}{2} \right)^h \\ \leq \frac{\pi(h+1)}{2} \left(\frac{1 + \cos \delta}{2} \right)^h$$

qui est une majoration indépendante de x et qui
tend vers 0 quand $h \rightarrow +\infty$ car $1 + \cos(\delta) < 2$
car $0 \leq \delta \leq \pi$.

Remarques

FLA2 1) Comme $L_{2\pi}^2$ est un Hilbert, on en déduit
193 immédiatement que comme $S_N(f) = \sum_{n=-N}^N c_n(f) e_n$
et que $c_n(f) = \langle f, e_n \rangle$ alors :

$(S_N(f))_N$ converge vers f en norme quadratique :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N(f) - f\|_2 = 0$$

cad $f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e_n$ dans $L_{2\pi}^2$

Et on a également la formule de Parseval :

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2$$

BMP 2) On peut obtenir cette dernière d'une autre
128 manière.

En effet, le théorème de Fejér nous dit entre
autres que si $f \in L_{2\pi}^1$ pour $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ alors
 $\sigma_N(f)$ (la somme de Cesàro de $S_N(f)$) converge
vers f pour $\|\cdot\|_1$.

Or pour tout f , $\sigma_N(f)$ est un polynôme
trigonométrique, donc on obtient pour $p=2$

~~q~~ $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de L^2_{μ} .