

Règle de Raabe-Duhamel

- Suites et séries, El Amrani, p 177
- Développements d'analyse, Hadine, p 172

E-A 117 Lemme: Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels strictement positifs.

On suppose qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tq:

$$\forall n \geq N: \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

Alors si $\sum v_n$ CV, $\sum u_n$ CV aussi.

Dém: Soit $n \in \mathbb{N}$ et tq $n \geq N+1$. On a:

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} \leq \frac{v_n}{v_{n-1}} \quad \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \leq \frac{v_{n-1}}{v_{n-2}} \quad \dots \quad \frac{u_{N+1}}{u_N} \leq \frac{v_{N+1}}{v_N}$$

Alors en multipliant terme à terme, on obtient un produit télescopique et:

$$\frac{u_n}{u_N} \leq \frac{v_n}{v_N}$$

$$\text{donc } u_n \leq \frac{u_N}{v_N} \cdot v_n$$

Comme $\frac{u_N}{v_N}$ est une constante (strict positive) et que la v_n série $\sum v_n$ est convergente, on conclut grâce à la règle de comparaison pour les SATCP. On peut aussi en conclure que si $\sum u_n$ DV alors par le m argument, $\sum v_n$ DV.

Règle de Raabe-Duhamel:

Soit $\sum u_n$ une série à termes stricts positifs.

On suppose qu'il existe $d \in \mathbb{R}$ tq

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{d}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty$$

Alors:

- si $d > 1$, $\sum u_n$ converge
- si $d < 1$, $\sum u_n$ diverge

Dém: On remarque d'abord que si $\lambda \leq 0$, alors $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est supérieur à 1. Ainsi la suite (u_n) est croissante à termes strictement positifs, donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Soit $\lambda > 0$.

Soit $\beta \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$v_n = \frac{1}{n^\beta}. \quad \text{Alors}$$

$$\begin{aligned} \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \frac{n^\beta}{(n+1)^\beta} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^\beta = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\beta} \\ &= 1 - \frac{\beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

$$\text{Donc: } \frac{v_{n+1}}{v_n} - \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\lambda - \beta}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Si $\lambda = \beta$, on ne peut rien dire.

On prend donc $\beta \neq \lambda$, alors pour n assez grand,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} - \frac{u_{n+1}}{u_n} \text{ est du signe de } \lambda - \beta.$$

• Si $\lambda > 1$, on peut choisir β tel que $\lambda > \beta > 1$.

Alors $\sum v_n = \sum \frac{1}{n^\beta}$ est une série de

Riemann CV, et comme $\lambda - \beta > 0$ on

$$a \quad \frac{v_{n+1}}{v_n} > \frac{u_{n+1}}{u_n} \quad \text{pour } n \text{ assez grand.}$$

D'après le lemme, $\sum u_n$ converge.

• Si $\lambda < 1$, on peut choisir $\lambda < \beta < 1$.

Alors $\sum v_n$ est une série de Riemann

divergente et comme $\lambda - \beta < 0$ alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{v_{n+1}}{v_n} \quad \text{pour } n \text{ assez grand}$$

C'est ici que
sest le fait
que $\lambda \geq 0$

(car alors

$0 \leq \lambda < \beta < 1$ (en fait n'est pas car la série
DV même si β négatif))

D'après le lemme, $\sum u_n$ diverge.

Exemple: Soit $d > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
 $u_n = \frac{n \cdot n!}{(d+1) \dots (d+n)}$. Alors la série $\sum u_n$ CV si $d > 2$
et DV si $d \leq 2$.

Preuve: Cette suite est à termes strict positifs.

En voulant appliquer la règle de d'Alembert, on a :

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)(n+1)!}{(d+1) \dots (d+n)(d+n+1)} \times \frac{(d+1) \dots (d+n)}{n \cdot n!} \\ &= \frac{n+1}{n} \cdot \frac{(n+1)}{(d+n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \end{aligned}$$

Donc le cas est indéterminé.

On a :

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+1}{d+n+1} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(\frac{1}{1 + \frac{d}{n+1}}\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{d}{n+1} + O\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{d}{n} \frac{n}{n+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{d}{n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{d}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= 1 - \frac{d}{n} + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= 1 - \frac{d-1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

D'après la règle de Raabe-Duhamel, la série $\sum u_n$ CV si $d > 2$ et DV si $d < 2$

Leu fait elle DV si $d = 2$ mais il faut faire une étude approfondie.