

101
104
105
190

Formule de Burnside et application

- Algèbre, le grand Carlot,
Berkey, p 172
- Carnet de voyage en Algèbre,
Caldano, p 163

Soit G un groupe agissant sur un ensemble X .

BER

172

Def: Soit $x \in X$. L'ensemble $\text{Stab}(x) = \{g \in G; g \cdot x = x\}$
est appelé le stabilisateur de x sous l'action de
 G . C est un sous-groupe de G .

Def: Soit $x \in X$. L'ensemble $\mathcal{O}_x = \{g \cdot x; g \in G\} \subset X$
est appelé l'orbite de x sous l'action de G .

Prop (formule des classes): Soit $x \in X$.
L'application $f: G/\text{Stab}(x) \rightarrow \mathcal{O}_x$
 $\bar{g} \mapsto g \cdot x$

est une bijection

Ainsi si G est fini, alors on a la relation:

$$|G| = |\mathcal{O}_x| \times |\text{Stab}(x)|$$

BER

174

CAL

164

Preuve: On montre que f est bien définie.

Il est d'abord évident que $\bar{g}$ dans l'orbite de x .

Soit $\bar{g}_1 = \bar{g}_2$. Alors $g_1 \cdot \text{Stab}(x) = g_2 \cdot \text{Stab}(x)$

Alors $g_1 \in g_2 \cdot \text{Stab}(x)$ donc il existe $h \in \text{Stab}(x)$
tel que $g_1 = g_2 h$

Alors: $g_1 \cdot x = (g_2 h) \cdot x = g_2 \cdot (h \cdot x)$ (car action de groupe)
 $= g_2 \cdot x$ car $h \in \text{Stab}(x)$

Donc f est bien définie

Par définition de l'orbite, f est surjective.

On montre que f est injective.

Soit $\bar{g}_1, \bar{g}_2 \in G/\text{Stab}(x)$ tel que $g_1 \cdot x = g_2 \cdot x$

Alors: $x = g_1^{-1} \cdot (g_2 \cdot x)$
 $= g_1^{-1} \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1^{-1} g_2) \cdot x$

Donc $g_1^{-1}g_2 \in \text{stab}(x)$ et alors il existe $h \in \text{stab}(x)$ tel que $g_1^{-1}g_2 = h \Leftrightarrow g_2 = g_1 h$.

Donc : $g_2 \cdot \text{stab}(x) = g_1 h \cdot \text{stab}(x) = g_1 \cdot \text{stab}(x)$.

On a bien l'injectivité.

Donc : $G/\text{stab}(x) \simeq \mathcal{O}_x$

En utilisant le théorème de Lagrange, on obtient l'égalité des cardinaux

Prop (formule de Burnside) : Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X . Soit X/G l'ensemble des orbites pour cette action.

Soit $\text{Fix}(g) = X^g = \{x \in X ; g \cdot x = x\}$

On a :

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|$$

Preuve : On va calculer de deux manières le cardinal

de : $R = \{(g, x) \in G \times X ; g \cdot x = x\}$

• D'une part, si l'on fixe $x \in X$ alors

$$\text{car } R = \bigcup_{x \in X} \{(g, x) ; g \in G \text{ et } g \cdot x = x\}$$

$$= \bigcup_{x \in X} \text{stab}(x) \times \{x\}$$

$$\text{Alors : } |R| = \sum_{x \in X} |\text{stab}(x)|$$

→ somme des classes

$$= \sum_{x \in X} \frac{|G|}{|O_x|} = |G| \sum_{x \in X} \frac{1}{|O_x|}$$

On X est la réunion disjointe de ses orbites

Ainsi en regroupant les éléments x de X par

orbites :

$$|R| = |G| \sum_{g \in X/G} \sum_{x \in O} \frac{1}{|O_x|}$$

$$= |G| \sum_{g \in X/G} \frac{|O_x|}{|O_x|} = |G| \times |X/G|$$

• D'autre part, si l'on fixe $g \in G$, on a :

$$R = \bigcup_{g \in G} \{g\} \times \text{Fix}(g)$$

$$\text{Donc : } |R| = \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|$$

On a donc la formule :

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|$$

(AL
163

Application : Soit S_n agissant sur $X = \{1, \dots, n\}$. Soit x la variable aléatoire sur S_n qui associe à $\sigma \in S_n$ son nombre de points fixes $x^\sigma = \text{stab}(\sigma)$.
Alors $E(x) = 1$ et $\text{Var}(x) = 1$.

Preuve : Comme il y a équiréprobabilité, on a :

$$E(x) = \frac{1}{|S_n|} \sum_{\sigma \in S_n} |x^\sigma| = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} |x^\sigma|$$

On d'après la formule de Burnside, cette quantité est égale au nombre d'orbites de l'action de S_n sur $\{1, \dots, n\}$.

On cette action est transitive car si $i, j \in \{1, \dots, n\}$ alors il existe $\sigma \in S_n$ tel que $\sigma(i) = j$.

($i \neq j$ prendre l'identité et sinon prendre $(i \ j)$)

Donc il n'y a qu'une seule orbite et
alors $E(x) = 1$.

Pour la variance, on considère l'action

$$\begin{aligned} \sum_n x (x \times x) &\rightarrow x \times x \\ (g, (x, x)) &\mapsto (g \cdot x, g \cdot x) \end{aligned}$$

Alors cette action possède deux orbites :

- l'orbite des éléments diagonaux de la forme (x, x) avec $x \in X$
C'est une orbite par le travail précédent.
- l'orbite des éléments non diagonaux de la forme (x, x') avec $x, x' \in X$ et $x \neq x'$.
C'est une orbite car si (i, i') et (j, j') sont deux couples d'éléments distincts de X , alors il existe σ tel que $\sigma(i) = j$ et $\sigma(i') = j'$
(par exemple $\sigma = (ij)(i'j')$)

D'après la formule de Burnside, comme

$$\begin{aligned} (X \times X)^G &= \{ (x, i') \in X \times X ; g \cdot (x, i') = (x, i') \} \\ &= \{ (x, x') \in X \times X ; (g \cdot x, g \cdot x') = (x, x') \} \\ &= \{ (x \in X^g ; x' \in X^g) \} \\ &= X^g \times X^g \end{aligned}$$

alors :

$$2 = |(X \times X)^G| = \frac{1}{n!} \sum_{g \in G} |(X \times X)^g| = \frac{1}{n!} \sum_{g \in G} |X^g|^2$$

$$\begin{aligned} \text{On : } \text{Var}(X) &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{g \in G} |X^g|^2 - \left(\frac{1}{n!} \sum_{g \in G} |X^g| \right)^2 \\ &= 2 - 1^2 = 1 \end{aligned}$$