

Développement : Simplicité de $SO(3)$

Étienne PEILLON

Le développement qui suit consiste à prouver le théorème suivant, à propos du groupe spécial orthogonal réel

$$SO(3) = \{g \in GL(\mathbb{R}^3), {}^tgg = \text{Id}, \det g = 1\}.$$

Théorème

Le groupe $SO(3)$ est simple.

La preuve repose essentiellement sur le fait que les renversements engendrent $SO(3)$ et que tous les renversements sont conjugués entre eux. Pour ce faire, à partir d'un élément $h \in H \triangleleft SO(3)$, il suffit de construire un renversement appartenant à H , et pour le construire, on utilise la connexité et la compacité de $SO(3)$ ainsi que le caractère archimédien de $\mathbb{R}$.

Le recasage est le suivant :

- ***** 103 : Conjugaison dans un groupe. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.
- ***** 108 : Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.
- **** 106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E , sous-groupes de $GL(E)$. Applications.
- *** 158 : Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (de dimension finie).
- *** 161 : Espaces vectoriels et espaces affines euclidiens : distances, isométries.
- *** 204 : Connexité. Exemples d'applications.
- *** 191 : Exemples d'utilisation de techniques d'algèbre en géométrie.

Démonstration.

Partie 1 : Classes de similitudes de $SO(3)$.

Remarque

Il est important de savoir que tout élément de $SO(3)$ est $O(3)$ -semblable à une matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

où $\theta \in \mathbb{R}$. Si $\theta = 0$, on retrouve l'identité. Si $\theta = \pi$, on obtient un renversement. Sinon, c'est une rotation. Il ne faut pas oublier que la matrice de passage est une matrice orthogonale, cela intervient de manière cruciale dans la connexité !

Soit $g \in SO(3)$. Le spectre complexe de g contient nécessairement 1. D'abord, le polynôme caractéristique de g est de degré 3, donc admet au moins une valeur propre réelle. Si $\lambda \in Sp(g)$ est réelle, alors étant donné un vecteur propre non nul associé, on a $\|v\| = \|g(v)\| = |\lambda| \|v\|$, de sorte que $\lambda = \pm 1$. Par ailleurs, si $\lambda \in Sp(g)$ n'est pas réelle, alors $\bar{\lambda} \in Sp(g)$; car le polynôme caractéristique de g est réel. Ainsi, si on énumère toutes les possibilités de spectre possibles, on écarte

$$(-1, -1, -1), \quad (-1, \lambda, \bar{\lambda}),$$

car le produit des valeurs propres est censé être égal à 1. Il ne reste alors comme possibilités

$$(1, 1, 1), \quad (1, -1, -1), \quad (1, \lambda, \bar{\lambda}).$$

Ainsi, 1 est bien valeur propre de g , et on note v un vecteur propre normé associé. Si on note $F = v^\perp$, F est stable par g : si $w \in F$, alors

$$\langle g(w), v \rangle = \langle w, {}^t g(v) \rangle = \langle w, g^{-1}(v) \rangle = \langle w, v \rangle = 0.$$

Ainsi, si g_F est l'endomorphisme induit par g sur F , alors $g_F \in SO(2, F)$, car $\det g_F = \det g = 1$ et g_F conserve la norme euclidienne. Donc g_F est une rotation plane, et il existe une base orthonormée v', v'' de F et $\theta \in \mathbb{R}$, de telle sorte que g soit conjuguée à

$$R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

avec pour matrice de passage P , dont les colonnes sont constituées des vecteurs v, v' et v'' . Comme (v, v', v'') est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$, on vérifie que ${}^t P P = \text{Id}$ de sorte que $P \in O(3)$.

Partie 2 : Connexité et compacité de $SO(3)$.

Remarque

L'idée est de montrer quelques propriétés de base sur $SO(3)$. Ce n'est pas une partie qui doit prendre du temps. Si besoin, la compacité peut tout à fait être ellipsée, comme dans [CP22].

On considère le chemin

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 1] &\longrightarrow SO(3) \\ t &\longmapsto P R_{t\theta} P^{-1}, \end{aligned}$$

qui est bien définie, car ${}^t(P R_{t\theta} P^{-1})(P R_{t\theta} P^{-1}) = \text{Id}$ et $\det P R_{t\theta} P^{-1} = 1$. γ est clairement continue, par continuité des matrices vis-à-vis de leurs coefficients et continuité de la multiplication matricielle. De plus, $\gamma(0) = \text{Id}$ et $\gamma(1) = g$, donc $SO(3)$ est connexe.

Par ailleurs, $SO(3)$ est clairement fermé en tant qu'image réciproque de singletons par des applications continue et borné, car si on considère la norme subordonnée à la norme euclidienne, alors

$$\|g\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|g(x)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|x\| = 1.$$

Ainsi, $SO(3)$ est compact.

Partie 3 : Image de $SO(3)$ par l'application φ .

Soit H un sous-groupe distingué dans $SO(3)$ et $h \in H$ non trivial. On note

$$\begin{aligned} \varphi : SO(3) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ g &\longmapsto \text{tr}([g, h]) \end{aligned}$$

où $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$.

Remarque

L'idée est de montrer que l'image de φ est un intervalle compact et connexe $[a, 3]$ d'où la partie précédente. On montre rapidement que la borne supérieure est 3, puis on montre par contraposée ^a que la borne inférieure est forcément strictement plus petite que 3. D'ailleurs, on utilise ici un outil de base de la réduction qui est que deux endomorphismes commutant ont les mêmes espaces stables.

^a. On pourrait croire à un raisonnement par l'absurde en lisant [CP22], mais c'est bien un raisonnement par contraposée.

Comme φ est continue, et que $SO(3)$ est connexe compact, l'image de φ est un intervalle qu'on note $[a, b]$ (à ne pas confondre avec le commutateur). Si $g \in SO(3)$, $[g, h] \in SO(3)$ et il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ de telle sorte que $[g, h]$ est semblable à R_α , et $\varphi(g) = 1 + \cos \alpha \in [-1, 3]$. De plus, $\varphi(\text{Id}) = 3$, d'où $b = 3$.

Supposons que $a = 3$. Alors, h commute avec tous les éléments de $SO(3)$ et en particulier avec les rotations. Soit D une droite de $\mathbb{R}^3$ et r une rotation d'axe D . Comme h et r commutent et que D est stable par r , D est aussi stable par h . Ainsi, toute droite est stable par h , et son spectre est réel. De fait, le spectre de h est parmi

$$(1, 1, 1), \quad (1, -1, -1).$$

Considérons v un vecteur propre associé à 1. Si h admet une valeur propre négative, de vecteur propre v' orthogonal à v , alors $h(v + v') = v - v' \in \mathbb{R}(v + v')$, ce qui n'est pas possible, car v et v' ne sont pas liés. Ainsi, le spectre de h est nécessairement positif et $h = \text{Id}$.

Par contraposée, comme h est supposé différent de l'identité, $a < 3$ et donc $a \in [-1, 3[$.

Partie 4 : Construction d'un renversement.

Remarque

C'est le moment clé de la preuve. L'idée est que par surjectivité de φ et le caractère archimédien de $\mathbb{R}$, on peut construire un angle dont π est multiple et admettant un pseudo-antécédent par φ . Néanmoins, ce n'est pas l'antécédent qui nous intéresse, mais plutôt son commutateur avec h . Attention à [CP22], l'équation qu'on obtient sur h_n , d'angle $\alpha \in]-\pi, \pi]$, est $\cos \theta_n = \cos \alpha$ où $\theta_n \in]0, \pi]$, d'où $\alpha = \pm \theta_n$.

Comme $a \in [-1, 3[$, il existe $\theta \in]0, \pi]$ tel que $a = 1 + \cos \theta$. Ainsi, il existe aussi un entier $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $\theta_n = \pi/n \in]0, \theta]$, de sorte que $1 + 2 \cos \theta_n \in]a, 3[$. Or φ est surjectif sur $]a, 3[$, donc il existe $g_n \in SO(3)$ tel que $\varphi(g_n) = 1 + 2 \cos \theta_n$. Si on note $h_n = [g_n, h] = g_n h g_n^{-1} h^{-1}$, on a $\text{tr}(h_n) = 1 + 2 \cos \theta_n$ et h_n est une rotation d'angle $\pm \theta_n$. Finalement $r = h_n^n$ est une rotation d'angle π , c'est-à-dire un retournement.

Par ailleurs, comme H est distingué dans $SO(3)$, $g_n h g_n^{-1} \in H$ et $r \in H$.

Partie 5 : Conclusion.

Remarque

Je ne suis pas convaincu par [CP22]. Il vaut mieux se référer à [Per96]. De fait, les arguments sont tels que la conclusion vient immédiatement. Il faut être en mesure de montrer que des isométries de mêmes natures sont conjuguées et $SO(3)$ (respectivement $O(3)$) est engendré par les renversements (resp. les réflexions).

Comme tous les renversements sont conjugués entre eux dans $SO(3)$, et que H est stable par conjugaison, H contient tous les renversements. Or $SO(3)$ est engendré par les renversements, de sorte que $SO(3) \subset H$. Ainsi, $H = SO(3)$. □

Références

- [CP22] Philippe Caldero and Marie Peronnier. Carnet de voyage en Algébrerie. Im-et-Ker. Calvage et Mounet, 2022.
- [Per96] Daniel Perrin. Cours d'algèbre. Éditions Ellipses, 1996.

Annexe

Voici une annexe rassemblant les résultats disséminés dans les chapitres V et VI de [Per96].

On se donne un espace vectoriel euclidien E de dimension finie et F un sous-espace vectoriel non trivial de E . On note p_F projecteur sur F .

Définition

On appelle symétrie orthogonale par rapport à F l'endomorphisme involutif $s_F := p_F - p_{F^\perp}$.

Si $\text{codim } F = \dim F^\perp = 1$, on dit que s_F est une réflexion. Si $\text{codim } F = \dim F^\perp = 2$, on dit que s_F est un renversement ou retournement.

Une réflexion est déterminée soit par son hyperplan F , soit par sa droite $D = F^\perp$. De même, un renversement est déterminé par son plan $P = F^\perp$. Ainsi, agir sur les réflexions (respectivement les renversements) revient à agir sur leurs droites (resp. leur plan).

Conjugaison de symétries

Lemme : Principe de conjugaison

Soit $u \in O(E)$. L'endomorphisme us_Fu^{-1} est une symétrie orthogonale par rapport à $u(F)$, c'est-à-dire $s_{u(F)} = us_Fu^{-1}$. De plus, $u(F^\perp) = u(F)^\perp$.

Démonstration. D'emblée, $(us_Fu^{-1})^2 = \text{Id}$, donc $E = E^+ \oplus E^-$ avec $E^\pm = \ker(us_Fu^{-1} \mp \text{Id})$ et $us_Fu^{-1} = p_{E^+} - p_{E^-}$. On vérifie facilement que $E^+ = u(F)$ et $E^- = u(F^\perp)$. Enfin, l'identité $\langle x, y \rangle = \langle u(x), u(y) \rangle$ garantit que $u(F^\perp) = u(F)^\perp$. □

Proposition : Classes de conjugaison des symétries orthogonales

Soient s_{F_1} et s_{F_2} deux symétries orthogonales de même nature, c'est-à-dire $\dim F_1 = \dim F_2$. Il existe $u \in SO(E)$ vérifiant $s_{F_2} = us_{F_1}u^{-1}$.

Démonstration. Soient $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ et $(f_i)_{i=1,\dots,n}$ deux bases orthonormales adaptées aux décompositions $E = F_1 \oplus F_1^\perp$ et $E = F_2 \oplus F_2^\perp$. On note $u \in GL(E)$ l'endomorphisme vérifiant $u(e_i) = f_i$ pour $i = 1, \dots, n$. On vérifie immédiatement que u est une isométrie, car si $x, y \in E$, alors

$$\langle u(x), u(y) \rangle = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j \langle u(e_i), u(e_j) \rangle = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j \langle f_i, f_j \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \langle x, y \rangle.$$

Quitte à poser $u(e_1) = -f_1$, on a $u \in SO(E)$ et $u(F_1) = F_2$ par construction. Le principe de conjugaison nous assure que $us_{F_1}u^{-1}$ est la symétrie orthogonale par rapport à $u(F_1) = F_2$, c'est-à-dire s_{F_2} . $\square$

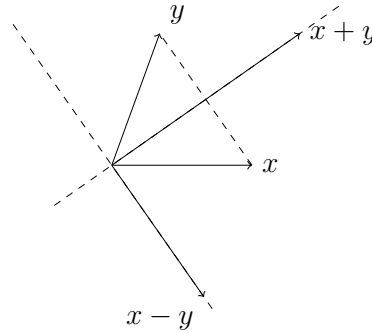
Générateurs du groupe orthogonal

Théorème

Les réflexions engendrent $O(E)$.

On peut trouver la preuve dans [Per96] et constitue un développement en soi. Je pense qu'il faut néanmoins connaître le principe de la démonstration. Il s'agit d'une récurrence sur la dimension du supplémentaire de l'ensemble des points fixes des endomorphismes. Une bonne manière de comprendre pourquoi les réflexions engendrent $O(E)$ est de le faire en dimension 2.

Cas de la dimension 2. Soit $u \in O(2)$ et $F_u = \{x \in \mathbb{R}^2, u(x) = x\}$. Si $\dim F_u = 2$, alors $u = \text{Id}$. Si $\dim F_u = 1$, alors $\dim F_u^\perp = 1$ et u stabilise $F_u^\perp$, u est une réflexion orthogonale par rapport à F_u . Enfin, si $\dim F_u = 0$, nous allons construire une réflexion s de telle sorte que l'ensemble des points fixes de su est de dimension 1, et on se ramène au cas précédent. Soit $x \in \mathbb{R}^2$ non nul, et $y = u(x)$. En particulier, on a $\|x\| = \|y\|$. D'après le schéma, x et y sont symétriques



par rapport à la droite dirigée par $x + y$. Cette droite est notamment le sous-espace orthogonal à $x - y$. Ainsi, on définit la réflexion s_1 de droite $x - y$. On vérifie que

$$s(y) = \frac{1}{2}(s(x+y) + s(y-x)) = \frac{1}{2}(x+y - (y-x)) = x.$$

Ainsi, s_1u admet au moins un point fixe, et par conséquent, il existe une réflexion s_2 vérifiant $u = s_1s_2$. $\square$

Théorème

Pour $\dim E \geq 3$, les renversements engendrent $SO(E)$.

Remarque

Le théorème est clairement faux pour $\dim E = 2$, car le seul renversement dans cet espace est $-\text{Id}$.

Le cas $\dim E = 3$. Si s est une réflexion, $-s$ est un renversement, ce qui conclut la preuve. $\square$

Le cas $\dim E \geq 3$. Comme le déterminant des réflexions est -1 , les éléments de $SO(3)$ sont engendrés par un nombre pair de réflexions. Il suffit donc de montrer que le produit de deux

réflexions se décompose en renversements. Soient s_1 et s_2 deux réflexions distinctes d'hyperplans H_1 et H_2 . On note F un sous-espace vectoriel de dimension $n - 3$ contenu dans $H_1 \cap H_2$ et $u = s_1 s_2$.

Remarque

On pourrait se demander pourquoi on ne prend pas $F = H_1 \cap H_2$. Comme H_1 et H_2 sont distincts, on a $\dim H_1 \cap H_2 = n - 2$. Ainsi l'endomorphisme induit $(s_1 s_2)|_{(H_1 \cap H_2)^\perp}$ est une rotation. Or une rotation ne se décompose pas en un produit de renversement.

Comme $u|_F = \text{Id}$, F est stable par u , $F^\perp$ l'est également. Or, $\dim F^\perp = 3$, donc l'endomorphisme induit par u sur $F^\perp$ est une rotation, et par conséquent se décompose en un produit de renversements r_1 et r_2 , qu'on peut étendre par l'identité sur F . Finalement, on a bien $s_1 s_2 = r_1 r_2$. $\square$