

La forme
quadratique
 $T_n(M^2)$ sur $M_n(\mathbb{R})$

Mathématiques pour l'ingénieur
Rambaldi, p 491

R011 • Soit $q : M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$
491 $M \mapsto T_n(M^2)$

Alors q est une forme quadratique sur $M_n(\mathbb{R})$, non
dégénérée, de rang n^2 et de signature

$$\text{sgn}(q) = \left(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2} \right)$$

De plus,

$$S_n(\mathbb{R})^\perp = A_n(\mathbb{R})$$

Dém: Soit $M = (x_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$

On pose :

$$\ell(M, N) = T_n(MN)$$

Alors comme la trace est une application linéaire,
alors ℓ est b-linéaire.

On ℓ est symétrique car $T_n(MN) = T_n(NM)$.

En effet si $M = (a_{ij})$ et $N = (b_{ij})$

alors :

$$(MN)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = c_{ij} \quad \text{et} \quad (NM)_{ij} = \sum_{k=1}^n b_{ik} a_{kj} = d_{ij}$$

$$\text{d'où } T_n(MN) = \sum_{i=1}^n c_{ii}$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{ki}$$

$$= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ki} a_{ik}$$

$$= \sum_{k=1}^n d_{kk} = T_n(NM)$$

$$\text{On : } \ell(M, M) = T_n(M^2) = q(M)$$

Donc q est une forme quadratique de forme
polaire ℓ .

On fait la réduction de bases de q

En notant $m^2 = (p_{ij})_{\substack{1 \leq i, j \leq n}}^n$ alors

$$p_{ii} = \sum_{k=1}^n x_{ik} x_{ki} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc: } q(M) &= T_n(M^2) \\ &= \sum_{i=1}^n p_{ii} \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n x_{ik} x_{ki}$$

$$= \sum_{i=1}^n x_{ii}^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_{ij} x_{ji}$$

$$= \sum_{i=1}^n x_{ii}^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{4} \left[(x_{ij} + x_{ji})^2 - (x_{ij} - x_{ji})^2 \right]$$

$$= \sum_{i=1}^n x_{ii}^2 + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_{ij} + x_{ji})^2 - \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_{ij} - x_{ji})^2$$

$$= \sum_{i=1}^n L_{ii}^2(M) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} L_{ij}^2(M) - \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} L_{ji}^2(M)$$

$$\text{on: } L_{ii}(M) = x_{ii} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$$L_{ij}(M) = x_{ij} + x_{ji} \quad \forall i < j$$

$$L_{ji}(M) = x_{ij} - x_{ji} \quad \forall i < j$$

Sont des formes linéaires

Comme celles-ci sont indépendantes, on a obtenu la réduction de bases de q .

Le nombre de formes linéaires positives est

$$n + \text{card} \{ (i, j) \in m^2; 1 \leq i < j \leq n \}$$

$$= n + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{j-1} 1 = n + \sum_{j=1}^n (j-1)$$

$$= n + \left(\frac{n(n+1)}{2} - n \right) = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Le nombre de formes linéaires négatives est $\frac{n(n-1)}{2}$

Donc :

$$\bullet \operatorname{sgn}(q) = \left(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2} \right)$$

$$\bullet \operatorname{rg}(q) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2 = \dim(M_n(\mathbb{R}))$$

Donc q est non dégénérée car $\ker(q) = \{0\}$.

On a $M_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$ (preuve par analyse-synthèse) et $\dim(S_n(\mathbb{R})) = n + \frac{n^2 - n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$

Soit $(M, N) \in A_n(\mathbb{R}) \times S_n(\mathbb{R})$

$$\text{Alors } (MN)^T = N^T M^T = N(-M) = -NM$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \ell(M, N) &= \operatorname{Tr}(MN) = \operatorname{Tr}((MN)^T) = \operatorname{Tr}(N^T M^T) \\ &= \operatorname{Tr}(N(-M)) = -\operatorname{Tr}(NM) = -\operatorname{Tr}(MN) \end{aligned}$$

Δ Enven dans Donc $\ell(M, N) = 0$

ROM, MN^T Donc $M \in S_n(\mathbb{R})^\perp$.

$A_n(\mathbb{R})$ Alors $A_n(\mathbb{R}) \subset S_n(\mathbb{R})^\perp$

Or comme ℓ est non dégénérée, on a que :

$$\begin{aligned} \dim(S_n(\mathbb{R})^\perp) &= \dim(M_n(\mathbb{R})) - \dim(S_n(\mathbb{R})) \\ &= n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \dim(A_n(\mathbb{R})) \end{aligned}$$

Ainsi ces espaces ont même dimension donc
 $A_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R})^\perp$

Bonus : La restriction de q à $S_n(\mathbb{R})$ est définie positive et la restriction de q à $A_n(\mathbb{R})$ est définie négative

Dém: Pour $M \in S_n(\mathbb{R})$, $M^T = M$ donc

$$L_{ji}(M) = x_{ij} - x_{ji} = 0$$

Ainsi:

$$q(M) = \sum_{i=1}^n L_{ii}^2(M) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} L_{ij}^2(M) \geq 0$$

avec

$$q(M) = 0 \quad \text{ssi} \quad L_{ii}(M) = x_{ii} = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$$\text{et } L_{ij}(M) = x_{ij} + x_{ji} = 2x_{ij} = 0$$

$$\forall 1 \leq i < j \leq n$$

Donc $M = 0$

La restriction de q à $S_n(\mathbb{R})$ est donc définie positive.

Le raisonnement est similaire pour $d_n(\mathbb{R})$