

Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire

Recasages :

- 205 : Espaces complets. Exemples et applications.
- 206 : Exemples d'utilisation de la notion de dimension finie en analyse.
- 220 : Illustrer par des exemples la théorie des équations différentielles ordinaires.
- 221 : Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.

Références :

- Equations différentielles, Berthelin, p30
- Analyse pour l'agrégation, Bernis, p73

Théorème 1. *Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire*

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $A \in \mathcal{C}(I, M_n(K))$ et $B \in \mathcal{C}(I, K^N)$. Soit $(t_0, y_0) \in I \times K^N$. Alors le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = A(t)y + B(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (1)$$

admet une unique solution définie sur I .

Démonstration :

Reformulation de l'équation différentielle

Trouver une solution de cette équation différentielle revient à trouver un point fixe pour l'application ϕ qui, à une fonction y donnée, lui associe la fonction $\phi(y)$ définie par :

$$\phi(y)(t) = y_0 + \int_{t_0}^t A(s)y(s) + B(s) ds.$$

En effet, dire que $\phi(y) = y$ équivaut à dire que y est solution de $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t A(s)y(s) + B(s) ds$ et donc de l'équation différentielle avec condition de Cauchy car :

- Si y est solution de (1), alors y est dérivable sur I donc continue sur I On intègre alors entre t_0 et t :

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t A(s)y(s) + B(s) ds = y_0 + \int_{t_0}^t A(s)y(s) + B(s) ds$$

- Réciproquement, si $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t A(s)y(s) + B(s) ds$, alors d'après le théorème fondamental de l'analyse, y est dérivable sur I et $y'(t) = A(t)y(t) + B(t)$ pour tout $t \in I$ et de plus $y(t_0) = y_0$.

On se place dans le cas où I est un segment $[a; b]$ contenant t_0

Soit $E = \mathcal{C}(I, K^N)$. On le munit de la norme $\|y\|_E = \sup_{t \in I} \|y(t)\|$ (où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne sur K^N), ce qui en fait un espace complet (car I est compact et K^N est complet).

Par composition des applications continues A et $\|\cdot\|$, la fonction $t \mapsto \|A(t)\|$ est continue sur le segment $[a; b]$. D'après le théorème des bornes atteintes, il existe $M > 0$ tel que pour tout $t \in [a; b]$, $\|A(t)\| \leq M$.

On cherche alors à appliquer un théorème de point fixe itéré pour ϕ .

Soit $y, \tilde{y} \in E$.

On montre par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ que $\phi^p(y), \phi^p(\tilde{y}) \in E$ et que pour tout $t \in [a; b]$,

$$\|\phi^p(y)(t) - \phi^p(\tilde{y})(t)\| \leq M^p \frac{|t - t_0|^p}{p!} \|y - \tilde{y}\|_E.$$

- Initialisation :

Pour $p=0$, $\phi^0(y) = y \in E$ et $\phi^0(\tilde{y}) = \tilde{y} \in E$ donc :

$$\|\phi^0(y)(t) - \phi^0(\tilde{y})(t)\| = \|y(t) - \tilde{y}(t)\| \leq \|y - \tilde{y}\|_E.$$

- Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}$. On suppose le résultat vrai au rang p .

On a bien que $\phi^{p+1}(y) \in E$ car par hypothèse de récurrence, $\phi^p(y) \in E$, donc $\phi^{p+1}(y) = \phi(\phi^p(y))$ puisque ϕ va de E dans E .

Soit $t \in [a; b]$ (peu importe si $t \geq t_0$ ou $t < t_0$, on met des valeurs absolues). On a :

$$\begin{aligned} \|\phi^{p+1}(y)(t) - \phi^{p+1}(\tilde{y})(t)\| &= \|\phi(\phi^p(y)(t)) - \phi(\phi^p(\tilde{y})(t))\| \\ &= \left\| y_0 + \int_{t_0}^t A(s)\phi^p(y)(s) + B(s) ds - y_0 - \int_{t_0}^t A(s)\phi^p(\tilde{y})(s) + B(s) ds \right\| \\ &= \left\| \int_{t_0}^t A(s)(\phi^p(y)(s) - \phi^p(\tilde{y})(s)) ds \right\| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \|A(s)\| \cdot \|\phi^p(y)(s) - \phi^p(\tilde{y})(s)\| ds \right| \\ &\leq M \left| \int_{t_0}^t \|\phi^p(y)(s) - \phi^p(\tilde{y})(s)\| ds \right| \\ &\leq M \left| \int_{t_0}^t M^p \frac{(s - t_0)^p}{p!} \|y - \tilde{y}\|_E ds \right| \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &\leq \frac{M^{p+1}}{p!} \|y - \tilde{y}\|_E \left| \frac{(t - t_0)^{p+1}}{p+1} \right| \\ &\leq M^{p+1} \frac{|t - t_0|^{p+1}}{(p+1)!} \|y - \tilde{y}\|_E. \end{aligned}$$

Donc l'hérédité est vérifiée.

Or $t, t_0 \in [a; b]$ donc $|t - t_0| \leq b - a$.

Ainsi en passant au sup sur $t \in [a; b]$, on obtient :

$$\|\phi^p(y) - \phi^p(\tilde{y})\|_E \leq M^p \frac{(b - a)^p}{p!} \|y - \tilde{y}\|_E.$$

Or $\lim_{p \rightarrow +\infty} M^p \frac{(b - a)^p}{p!} = 0$ car il s'agit du terme général de la série exponentielle $e^{M(b-a)}$ qui est convergente.

Donc il existe un rang p_0 tel que ce terme soit dans l'intervalle $]0; 1]$.

Ainsi l'application ϕ^{p_0} est contractante.

On a donc :

- ϕ^{p_0} va de E dans E .
- E est complet.
- ϕ^{p_0} est contractante.

Alors d'après le théorème du point fixe de Banach-Picard, ϕ^{p_0} admet un unique point fixe y_1 dans E : $\phi^{p_0}(y_1) = y_1$.

On compose par ϕ : $\phi^{p_0}(\phi(y_1)) = \phi(y_1)$. Donc $\phi(y_1)$ est aussi un point fixe de ϕ^{p_0} . Par unicité, $\phi(y_1) = y_1$ et alors y_1 est un point fixe de ϕ .

Or tout point fixe de ϕ est un point fixe de ϕ^{p_0} , donc y_1 est l'unique point fixe de ϕ .

Finalement, le problème de Cauchy (1) admet une unique solution sur $[a; b]$.

On se place dans le cas où I est un intervalle quelconque

Pour tout intervalle J compact contenant t_0 inclus dans I , il existe alors une unique solution y_J .

On définit alors y de I dans K^N par $y(t) = y_J(t)$ où J est un intervalle compact quelconque inclus dans I et contenant t_0 et t .

Ceci est bien défini car si l'on prend J_1 et J_2 , sur $\tilde{J} = J_1 \cap J_2$, on a unicité (car $\tilde{J}$ reste un intervalle compact contenant t_0 et t) et donc $y_{J_1} = y_{J_2}$ sur $\tilde{J}$. Alors en particulier on a que $y_{J_1}(t) = y_{J_2}(t)$.

Ainsi y est bien solution de (1) et est définie sur I entier.

On prouve l'unicité

Et alors on a unicité de y car si $\tilde{y}$ est une autre solution de (1), soit $t \in I$, il existe J un intervalle compact de I contenant t et t_0 tel que $y(t) = y_J(t)$.

Mais alors $\tilde{y}_J$ est solution sur J donc par unicité, $\tilde{y}_J = y_J$ et alors $\tilde{y}(t) = \tilde{y}_J(t) = y_J(t) = y(t)$.

Finalement $y = \tilde{y}$. □

Remarque 1. (BERT 34)

Comme conséquence du théorème, on obtient la structure de l'espace des solutions.

Soit S l'ensemble des solutions de $y' = A(t)y + B(t)$ ($\mathcal{L}$)

Soit S_H l'ensemble des solutions de $y' = A(t)y$ ($\mathcal{L}_H$)

Proposition :

1. L'ensemble S_H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I, K^N)$.
2. Pour tout $t_0 \in I$, l'application

$$\begin{aligned} \phi_{t_0}: S_H &\rightarrow K^N \\ y &\mapsto y(t_0) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

3. S_H est de dimension N .

Démonstration :

1. Se fait à la main.
2. On montre à la main que ϕ_{t_0} est bien linéaire.
Soit $y_0 \in K^N$, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, il existe une et une seule solution $y \in S_H$ tel que $y(t_0) = y_0$. Ainsi ϕ_{t_0} est bijective.
3. On a donc que $S_H \simeq K^N$, d'où $\dim(S_H) = N$.

Remarque 2. (BERT 85)

Dans le cas général, on a aussi un théorème avec des conditions spécifiques.

Théorème 2. Théorème de Cauchy-Lipschitz

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R} \times K^N$ et $f: \Omega \rightarrow K^N$ continue dans toutes les variables et localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état. Soit $(t_0, y_0) \in \Omega$. Alors il existe une unique solution maximale $y: I \rightarrow K^N$ de $y' = f(t, y)$ tel que $y(t_0) = y_0$. De plus, l'intervalle I est ouvert.

Pour montrer que f est localement lipschitzienne par rapport à la variable d'état, il est suffisant de montrer qu'elle est de classe C^1 sur Ω .

Si l'on suppose seulement f continue, on perd l'unicité en général mais on a encore l'existence d'une solution locale. Il s'agit du théorème de Cauchy-Peano-Arzelà.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire est un cas particulier du théorème de Cauchy-Lipschitz dans le cas globalement lipschitzien.

Démonstration :

On pose $f(t, y) = A(t)y + B(t)$. Il suffit de montrer que f est globalement lipschitzienne par rapport à la variable d'état uniformément par rapport à la variable de temps t .

Soit J un intervalle compact inclus dans I . Pour $t \in J$, pour $y_1, y_2 \in K^N$, on a :

$$\begin{aligned} \|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| &= \|A(t)y_1 - A(t)y_2\| \\ &\leq \|A(t)\| \cdot \|y_1 - y_2\| \\ &\leq \underbrace{\sup_{\sigma \in J} \|A(\sigma)\|}_{\text{fini}} \cdot \|y_1 - y_2\|. \end{aligned}$$