204
245

Principe du prolongement analytique et applications

- Topologie générale, Hassan, p 233
- Variables complexes, Lesfari, p 62
- Analyse complexe, Tauvel, p 52

HAS 233

Déf : On dit qu'un espace métrique X est connexe s'il n'est pas réunion de deux ensembles ouverts non vides disjoints. Autrement dit, si $X = U \sqcup V$ avec U et V deux ouverts disjoints de X, alors $U = \emptyset$ ou $V = \emptyset$

Prop : X est connexe ssi il n'existe pas dans X d'autres parties qui soient à la fois ouvertes et fermées que X et $\emptyset$.

Dém :

$\Rightarrow$: Si X est connexe. Soit A une partie non vide de X, qui soit à la fois ouverte et fermée dans X.

Soit $B = X \setminus A = X \cap A^c$

Alors comme A est fermée, A^c est ouvert donc B est ouvert comme intersection finie d'ouverts

Alors $X = B \sqcup A$ est réunion disjointe d'ouverts

Comme $A \neq \emptyset$, alors $B = \emptyset$

Donc $X = A$.

GOU 39

$\Leftarrow$: On suppose que $\emptyset$ et X sont les seuls ouverts-fermés.

On suppose que $X = A \sqcup B$ où A et B sont deux ouverts disjoints de X

Alors $A = X \setminus B$ est fermé. Donc A est ouvert-fermé et alors $A = \emptyset$, ou $A = E$ càd $B = \emptyset$.

LES 62
TAU 52

Théorème (principe du prolongement analytique) : Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $a \in \Omega$. Soit $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ (f est analytique sur Ω). Alors on a équivalence entre :

1) $f^{(k)}(a) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

2) $f \equiv 0$ dans un voisinage de a

3) $f \equiv 0$ sur Ω.

<u>Dém</u> : Les implications 3) => 2) => 1) sont claires

1) => 2) : Par hypothèse, f est analytique dans Ω et comme $a \in \Omega$, alors f est développable en série entière au voisinage de a. Soit V ce voisinage, alors $\forall z \in V$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (z-a)^k$$

Or $f^{(k)}(a) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$ donc $f \equiv 0$ sur V.

2) => 3) : Soit Δ l'ensemble des points de Ω qui possèdent un voisinage ouvert sur lequel $f \equiv 0$.
Alors Δ est un ouvert de Ω car Δ est un voisinage de chacun de ses points.
Montrons que Δ est fermé.
Soit $z \in \Omega$ tel qu'il existe une suite $(z_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de points de Δ tel que $\lim_{m \to \infty} z_m = z$
Comme f est analytique sur Ω, par continuité des $f^{(k)}$, on a que $f^{(k)}(z) = \lim_{m \to \infty} f^{(k)}(z_m) \quad \forall k \in \mathbb{N}$.
Or $f^{(k)}(z_m) = 0$ donc $f^{(k)}(z) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$
Ainsi z vérifie 1) donc vérifie 2).
Alors $f \equiv 0$ dans un voisinage de z et donc $z \in \Delta$.
Ainsi Δ est fermé dans Ω.
Alors Δ est ouvert-fermé dans Ω qui est connexe, donc $\Delta = \emptyset$ ou $\Delta = \Omega$.
Or $a \in \Delta$ donc $\Delta = \Omega$. Donc f est nulle sur Ω.

Corollaire : Soit Ω ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Soit $f, g \in \mathcal{A}(\Omega)$. On suppose que $f \equiv g$ dans un voisinage d'un point de Ω. Alors $f \equiv g$ sur Ω.
Il suffit d'appliquer le théorème à $f - g$.

Théorème des zéros isolés : Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Soit $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ non identiquement nulle. Alors les zéros de f sont isolés : l'ensemble des zéros de f dans Ω est discret.

Dém : Soit z_0 un zéro de f. Comme f n'est pas nulle sur Ω, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^{(p)}(z_0) \neq 0$.
On note m le plus petit de ces entiers.
Alors au voisinage de z_0, on a :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$$

$$= \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k = (z - z_0)^m g(z)$$

où $g(z) = \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^{k-m}$

$$= \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} + \frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!} (z - z_0) + \dots$$

On a donc $g(z_0) = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} \neq 0$ par hypothèse sur m.
Or g est développable en série entière en z_0, donc est continue en z_0.
Ainsi g ne s'annule pas dans un voisinage de z_0, et donc dans ce voisinage, le point z_0 est le seul zéro de la fonction f.

$\emptyset$ Exo BIBMATH

Corollaire : Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$.
Alors $\mathcal{A}(\Omega)$ est intègre.

Dém Soit $f, g \in \mathcal{A}(\Omega)$ tel que $fg \equiv 0$.
On suppose que $f \not\equiv 0$
Ainsi il existe $z_0 \in \Omega$ tel que $f(z_0) \neq 0$
Comme les zéros de f sont isolés, il existe un voisinage V de z_0 sur lequel f ne s'annule pas.
Mais alors par intégrité de $\mathbb{C}$, g est nulle sur V. Donc g est nulle sur un voisinage de z_0. Par le principe du prolongement analytique, g est nulle sur Ω.
Donc $\mathcal{A}(\Omega)$ est intègre.

Remarques :

TAU 54

1) Application : Soit Ω ouvert connexe de $\mathbb{C}$ avec $0 \in \Omega$. Alors il n'existe pas $f \in \mathcal{A}(\Omega)$ tel que $f(\frac{1}{n}) = f(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ assez grand.

Dém : Si f existe, f continue donc $f(0) = 0$.
Soit $g(z) = f(z) - z$. Alors $g(0) = 0$ et $g(\frac{1}{n}) = 0$ pour n grand. Or l'ensemble $\{\frac{1}{n} ; n \geq 1\} \cup \{0\}$ admet 0 comme point d'accumulation.
Donc les zéros de g ne sont pas isolés.
Donc g est nulle dans un voisinage de 0.
Or $g(-\frac{1}{n}) = \frac{2}{n} \neq 0$ Absurde.
Donc f n'existe pas.

En revanche, si $f(z) = |z|$, il existe des fonctions continues sur $\mathbb{C}$ vérifiant les conditions
(mais f n'est pas dans $\mathcal{A}(\Omega)$)

TAU 2) Exercice 4.4

54 Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{A}(U)$.

Soit $V = \{\bar{z} \; ; \; z \in U\}$

1) Si $z \in V$ on pose $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$. Prouver que $g \in \mathcal{A}(V)$

Preuve: Soit $a \in V$, donc $\bar{a} \in U$

Ainsi il existe $r > 0$ et une suite $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tel que $D(\bar{a}, r) \subset U$ et pour $|\bar{z} - \bar{a}| < r$, on a:

$$f(\bar{z}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (\bar{z} - \bar{a})^n$$

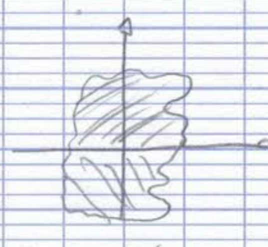
Alors $D(a, r) \subset V$ et si $|z - a| < r$,

$$g(z) = \overline{f(\bar{z})} = \sum_{n=0}^{+\infty} \bar{a}_n (z - a)^n$$ par continuité du conjugué.

Donc $g \in \mathcal{A}(V)$.

On suppose désormais que U est connexe et symétrique par rapport à l'axe des réels (on a donc $V = U$).

2) Prouver que $U \cap \mathbb{R}$ est non vide



Preuve: par l'absurde, si $U \cap \mathbb{R} = \emptyset$

Soit $U_+ = \{z \in U \; ; \; Im(z) > 0\}$

et $U_- = \{z \in U \; ; \; Im(z) < 0\}$

Alors U_+ et U_- sont des ouverts (car Im est continue) disjoints de U.

Or U est non vide et si $U \cap \mathbb{R}$ alors par exemple U^+ est non vide. Mais si $z \in U^+$ alors $\bar{z} \in U^-$ donc U^- est non vide.

Contradiction car U est connexe.

Donc $U \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$.

3) Montrer qu'on a équivalence entre:

a) $f(\bar{z}) = \overline{f(z)} \quad \forall z \in U$

b) Il existe une composante connexe C de $U \cap \mathbb{R}$ tel que $f(x) \in \mathbb{R} \quad \forall x \in C$.

Preuve :

a) => b) : On sait que $U \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$. Soit $z \in U \cap \mathbb{R}$. Alors $f(\bar{z}) = f(z) = \overline{f(z)}$. Donc $f(z) \in \mathbb{R}$. Ainsi pour toute composante connexe C de $U \cap \mathbb{R}$, $f(x) \in \mathbb{R} \quad \forall x \in C$.

b) => a) : Soit $h(z) = f(z) - \overline{f(\bar{z})}$ pour $z \in U$.

D'après 1), on a que $h \in \mathcal{A}(U)$ (car $V = U$)

~~On $U \cap \mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, donc C est un ouvert de $\mathbb{R}$~~ Or C est un connexe de $U \cap \mathbb{R}$ donc de $\mathbb{R}$, donc est un intervalle. Ainsi il existe $a < b$ tel que $]a;b[\subset C$ ~~[illegible]~~

Alors $h(x) = 0$ si $x \in]a;b[$

D'après le principe des zéros isolés, $h \equiv 0$ sur U

Donc $f(z) = \overline{f(\bar{z})} \quad \forall z \in U$ donc $f(\bar{z}) = \overline{f(z)} \quad \forall z \in U$.