

Intégrale de Dirichlet

Références :

- Francinou, Gianella, Nicolas : *Oraux X-ENS Analyse 3*, pages 214 à 217
- Bernis : *Analyse pour l'agrégation de mathématiques, 40 développements*, pages 260 à 265

Couplé avec les leçons : 228, 235, 236, 239

Théorème :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

Preuve :

$$\text{On pose } f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) & \longmapsto e^{-xt} \frac{\sin(t)}{t} \end{cases} \quad \text{et} \quad F(x) = \int_0^{+\infty} f(x, t) dt$$

On va montrer que F est bien définie.

Remarquons que, à $x > 0$ fixé, on a $\left| t^2 e^{-xt} \frac{\sin(t)}{t} \right| \leq t e^{-xt} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ donc $f(x, t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

On sait de plus que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$ donc $f(x, \cdot)$ est prolongeable en 0 par $t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ f(x, t) & \text{sinon} \end{cases}$

Donc pour tout $x > 0$, l'application $f(x, \cdot)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Montrons que F est bien définie en 0 :

Soit $X \geq 1$, par intégration par parties, on a :

$$\int_1^X \frac{\sin(t)}{t} dt = \left[\frac{-\cos(t)}{t} \right]_{t=1}^X - \int_1^X \frac{\cos(t)}{t^2} dt$$

Or $\left| \frac{\cos(t)}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ donc $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t^2}$ est un intégrable sur $[1, +\infty[$ (car c'est un $O(\frac{1}{t^2})$).

Cette intégrale admet donc une limite lorsque X tend vers l'infini et par suite, quand $X \rightarrow +\infty$, on a :

$$\int_1^X \frac{\sin(t)}{t} dt = \cos(1) - \int_1^X \frac{\cos(t)}{t^2} dt$$

Par ce qui précède, on a F bien définie en 0.

Montrons que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction f est de classe C^∞ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et on a pour tout $(x, t) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -e^{-xt} \sin(t)$
Soit $a > 0$, pour tout $x \geq a$, on a :

$$\forall t > 0, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = e^{-xt} |\sin(t)| \leq e^{-at}$$

Comme $t \mapsto e^{-at}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, cette domination nous assure, par les théorèmes de continuité et dérivabilité sous le signe intégral, que F est C^1 sur $]a, +\infty[$ et finalement sur $\mathbb{R}_+^*$ entier. De plus, on a

$$\begin{aligned} F'(x) &= - \int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin(t) dt = -\operatorname{Im} \left(\int_0^{+\infty} e^{-(x-i)t} dt \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(\frac{1}{i-x} \right) = -\frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

Par suite, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x > 0$, $F(x) = C - \arctan(x)$.

Et puisque $|\sin(t)| \leq |t|$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a $|F(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

On a donc $C = \frac{\pi}{2}$. Ainsi, pour tout $x > 0$, on a :

$$F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$$

Pour montrer que $F(0) = \frac{\pi}{2}$, il suffit donc de vérifier que F est continue en 0.

$$\text{On pose } F_1(x) = \int_0^1 e^{-xt} \frac{\sin(t)}{t} dt \quad \text{et} \quad F_2(x) = \int_1^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin(t)}{t} dt$$

La fonction F_1 est en fait de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ car on dispose de la domination $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = e^{-xt} |\sin(t)| \leq 1$

Et la fonction constante 1 est bien intégrable sur $]0, 1]$. Vérifions la continuité de F_2 qui est la partie imaginaire de

$$G(x) = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-(x-i)t}}{t} dt. \text{ Pour } X \geq 1, \text{ on a :}$$

$$\int_1^X \frac{e^{-(x-i)t}}{t} dt = \left[\frac{1}{i-x} \frac{e^{-(x-i)t}}{t} \right]_1^X + \frac{1}{i-x} \int_1^X \frac{e^{-(x-i)t}}{t^2} dt$$

Comme $\left| \frac{e^{-(x-i)t}}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$ la fonction $t \mapsto \frac{e^{-(x-i)t}}{t^2}$ est intégrable et

$$G(x) = \frac{e^{i-x}}{x-i} + \frac{1}{i-x} \int_1^{+\infty} \frac{e^{-(x-i)t}}{t^2} dt$$

Or la fonction $(x, t) \in \mathbb{R}_+ \times [1, +\infty[\mapsto \frac{e^{-(x-i)t}}{t^2} dt$ est continue et dominée par la fonction intégrable $t \mapsto \frac{1}{t^2}$

donc la fonction $x \mapsto \int_1^{+\infty} \frac{e^{-(x-i)t}}{t^2} dt$ est continue.

On en déduit que G est continue donc par suite F_2 et F le sont aussi.

Ainsi

$$F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

□

Remarque :

Pour montrer la continuité de F en 0, on aurait pu être tenté d'appliquer le théorème de convergence dominée.

Cependant, $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$. En effet, si tel était le cas, comme $\sin^2 \leq |\sin|$

(car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \sin(x) \leq 1$), la fonction $t \mapsto \frac{\sin^2(t)}{t}$ serait intégrable sur $[1, +\infty[$.

Or pour $X \geq 1$, on a :

$$\int_1^X \frac{\sin^2(t)}{t} dt = \int_1^X \frac{1 - \cos(2t)}{2t} dt = \frac{\ln(X)}{2} - \int_1^X \frac{\cos(2t)}{t} dt$$

Et par changement de variable $u = 2t$, on a $\int_1^X \frac{\cos(2t)}{t} dt = \int_2^{2X} \frac{\cos(u)}{u} du$

et par une intégration par parties, on a $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} du$ qui converge. Si bien que

$$\lim_{X \rightarrow \infty} \int_0^X \frac{\sin^2(t)}{t} dt = +\infty$$