

Méthode de Newton

Référence :

— François Rouvière : *Petit guide du calcul différentiel à l'usage de la licence et de l'agrégation*, pages 140 à 144

Couplé avec les leçons : 218, 223, 226, 229

Théorème :

Soient $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ tel que $c < d$ et $f \in C^2([c, d], \mathbb{R})$. On suppose que $f(c) < 0 < f(d)$ et que pour tout $x \in [c, d]$, on a $f'(x) > 0$.

On considère la suite récurrente $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} x_0 \in [c, d], \\ x_{n+1} = F(x_n), \quad \text{avec} \quad F(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}. \end{cases}$$

Alors f admet un unique zéro, noté a , et il existe un intervalle $I \subset [c, d]$ stable par F tel que, pour tout $x_0 \in I$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge à l'ordre 2 vers a dans I .

Si de plus $f'' > 0$,

Alors l'intervalle $I = [a, d]$ est stable par F et, pour $x_0 \in I \setminus \{a\}$, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante, et on a l'équivalent suivant :

$$x_{n+1} - a \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2} \frac{f''(a)}{f'(a)} (x_n - a)^2$$

Preuve :

La fonction f est continue sur $[c, d]$, on a $f(c) < 0$ et $f(d) > 0$ et f est strictement croissante. Ainsi par théorème des valeurs intermédiaire, on a l'existence d'un $a \in]c, d[$ tel que $f(a) = 0$.

Par stricte croissance de f , on a l'unicité d'un tel a .

Puisque $f(a) = 0$, on remarque que $F(a) = a$ et on a pour tout $x \in [c, d]$:

$$F(x) - a = x - a - \frac{f(x) - f(a)}{f'(x)} = \frac{f(a) - f(x) - (a - x)f'(x)}{f'(x)}$$

La formule de Taylor-Lagrange d'origine a et d'extrémité x appliquée au numérateur nous donne, l'existence d'un $z \in]a, x[$ tel que :

$$F(x) - a = \frac{1}{2} \frac{f''(z)}{f'(x)} (x - a)^2 \quad (*)$$

En posant $C := \frac{\max(|f''|)}{2 \min(|f'|)}$, on a pour tout $x \in [c, d]$: $|F(x) - a| \leq C|x - a|^2$

On considère $\alpha > 0$ assez petit pour que $C\alpha < 1$ et $I := [a - \alpha, a + \alpha]$ soit contenu dans $[c, d]$.

Alors, pour tout $x \in I$, on a :

$$|F(x) - a| \leq C\alpha^2 < \alpha, \quad \text{d'où } F(I) \subset I.$$

Montrons maintenant la convergence à l'ordre 2 :

Soit $x_0 \in I$. Par ce qui précède on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in I$ et :

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - a| &= |F(x_n) - a| \leq C|x_n - a|^2 \\ \text{donc} \quad C|x_n - a| &\leq (C|x_0 - a|)^{2^n} \leq (C\alpha)^{2^n} \end{aligned}$$

Puisque $0 < C\alpha < 1$, on a bien la convergence à l'ordre 2 de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers a (car c'est le seul point fixe de F sur $[c, d]$).

On suppose de plus que pour tout $x \in [c, d]$, $f''(x) > 0$. On pose désormais $I = [a, d]$.

Pour $a \leq x \leq d$ on a $f'(x) > 0$ et $f(x) \geq 0$, d'où :

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \leq x \quad (1)$$

avec inégalité stricte si $x > a$.

On a également par (*) :

$$F(x) - a = \frac{1}{2} \frac{f''(z)}{f'(x)} (x - a)^2 \geq 0 \quad (2)$$

avec inégalité stricte si $x > a$.

On a donc avec (1) et (2) I stable par F . De plus, par (1), on a que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante (strictement si $x_0 > a$).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $a < x_n \leq d$ (avec une suite constante si $x_0 = a$).

Donc la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, étant décroissante et minorée, admet une limite l qui vérifie $F(l) = l$, donc $f(l) = 0$ et $l = a$, par ce qui précède.

En appliquant la formule de Taylor-Lagrange en chaque x_n , on obtient une suite (z_n) telle que :

$$x_{n+1} - a = \frac{1}{2} \frac{f''(z_n)}{f'(x_n)} (x_n - a)^2$$

avec $a < z_n < x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \frac{f''(z_n)}{f'(x_n)} \right) = \frac{f''(a)}{2f'(a)}$ et l'équivalent :

$$x_{n+1} - a \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2} \frac{f''(a)}{f'(a)} (x_n - a)^2$$

□