

Suite des arctangentes itérées

Références :

- Xavier Gourdon : *Les maths en tête - ANALYSE*, pages 228-229 (sinus itérés, à adapter)
- Bernis : *Analyse pour l'agrégation de mathématiques, 40 développements*, (méthode générale)

Couplé avec les leçons : 223, 224, 226, 230

Théorème :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, la suite récurrente définie par
$$\begin{cases} u_0 \in I :=]0, 1] \\ u_{n+1} = \arctan(u_n) \end{cases}$$

Alors le développement asymptotique de cette suite est $u_n = \sqrt{\frac{3}{2n}} + \frac{3\sqrt{6}}{80} \frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}}\right)$

Preuve :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$ donc $\arctan$ est en particulier strictement croissante sur I .

De plus, $\arctan(0) = 0$ et $\arctan(1) = \frac{\pi}{4} < 1$ donc $\arctan(I) \subset I$.

$\forall x \in I$, $\arctan(x) < x$ et donc $\forall x \in I$, $\arctan(\arctan(x)) < \arctan(x)$ par stricte croissance de $\arctan$

Donc *par récurrence immédiate* (u_n) est strictement décroissante. Elle est de plus minorée par 0 donc elle converge vers une limite $l \in \bar{I}$ telle que $l = \arctan(l)$ d'où $l = 0$.

Nous allons nous servir des trois développements limités suivants, lorsque $x \rightarrow 0$:

- (1) $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6)$
- (2) $\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + o(x^2)$
- (3) $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$

On commence par déterminer un équivalent de u_n . Pour ce faire, on considère

$$S_n := \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}.$$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{(\arctan(u_n))^2} - \frac{1}{u_n^2} = \frac{1}{(u_n - \frac{u_n^3}{3} + o(u_n^3))^2} - \frac{1}{u_n^2} \quad \text{par (1)} \\ &= \frac{1}{u_n^2} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{u_n^2}{3} + o(u_n^2)\right)^2} - 1 \right] = \frac{1}{u_n^2} \left[1 + \frac{2}{3} u_n^2 + o(u_n^2) - 1 \right] \quad \text{par (2)} \\ &= \frac{2}{3} + o(1). \end{aligned}$$

Or la série $\sum \frac{2}{3}$ diverge donc $\sum \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$ diverge.

Par sommation des relations de comparaison, leurs sommes partielles sont équivalentes, et on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}n$$

On reconnaît une somme télescopique, on a $\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2}{3}n$

D'où :

$$u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{2n}} \quad (*)$$

Nous avons trouvé un équivalent pour u_n . Maintenant, nous allons poursuivre les calculs et les développements afin d'obtenir un développement asymptotique de u_n à un ordre supérieur.

$$\begin{aligned} \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} &= \frac{1}{u_n^2} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{u_n^2}{3} + \frac{u_n^4}{5} + o(u_n^4)\right)^2} - 1 \right] \quad \text{par (1)} \\ &= \frac{1}{u_n^2} \left[1 + \frac{2}{3}u_n^2 - \frac{2u_n^4}{5} + \frac{u_n^4}{3} + o(u_n^4) - 1 \right] \quad \text{par (2)} \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{15}u_n^2 + o(u_n^2) \end{aligned}$$

$$\text{Donc} \quad \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} - \frac{2}{3} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{15}u_n^2 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{15} \frac{3}{2n} = -\frac{1}{10n} \quad \text{par (*)}$$

Il s'agit d'un terme général d'une série divergente. Par sommation des relations de comparaison, leurs sommes partielles sont équivalentes, et on a :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} - \frac{2}{3} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n-1} -\frac{1}{10k} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{10} \ln(n)$$

$$\text{Et} \quad \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_1^2} - \frac{2n}{3}$$

D'où :

$$\begin{aligned} u_n &= \left(\frac{2n}{3} - \frac{1}{10} \ln(n) + o(\ln(n)) \right)^{-1/2} = \sqrt{\frac{3}{2n}} \left(1 - \frac{3}{20} \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \right)^{-1/2} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2n}} \left(1 + \frac{3}{40} \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) \right) \quad \text{par (3)} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2n}} + \frac{3\sqrt{6}}{80} \frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{\ln(n)}{n\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

□