

Méthode QR

Référence :

— Philippe Ciarlet : *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, pages 124 à 127

Couplé avec les leçons : 153, 156, 162, 226

Théorème :

Soient $A \in GL_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ vérifiant $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n| > 0$ tels qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ dont l'inverse P^{-1} admet une décomposition LU et qu'on ait

$$P^{-1}AP = D := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Alors la suite $(A_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\begin{cases} A_1 = A \\ A_{k+1} = R_k Q_k \end{cases} \text{ avec } Q_k R_k \text{ qui est la décomposition } QR \text{ de } A_k$$

converge vers une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale est $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

Preuve :

On commence par quelques calculs préliminaires. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on notera $Q^{(k)} = Q_1 \cdots Q_k$ et $R^{(k)} = R_1 \cdots R_k$. On a $A^k = Q^{(k)} R^{(k)}$. En effet :

$$\begin{aligned} A^k &= (Q_1 R_1)^k = Q_1 (R_1 Q_1)^{k-1} R_1 = Q_1 A_2^{k-1} R_1 \\ &= Q_1 (Q_2 R_2)^{k-1} R_1 = Q_1 Q_2 (R_2 Q_2)^{k-2} R_2 R_1 \\ &= \dots = Q_1 \cdots Q_{k-1} R_{k-1} Q_{k-1} R_{k-1} \cdots R_1 \\ &= Q_1 \cdots Q_{k-1} A_k R_{k-1} \cdots R_1 = Q_1 \cdots Q_{k-1} Q_k R_k R_{k-1} \cdots R_1 \\ &= Q^{(k)} R^{(k)} \end{aligned}$$

On peut aussi montrer par récurrence sur k que $A_{k+1} = Q^{(k)*} A Q^{(k)}$ (où pour une matrice $M \in Mn(\mathbb{C})$, $M^* = {}^t \overline{M}$ désigne la transconjugée de M). En effet, pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$A_{k+1} = R_k Q_k = Q_k^* Q_k R_k Q_k = Q_k^* A_k Q_k = Q_k^* Q^{(k-1)} A Q^{(k-1)} Q_k = Q^{(k)*} A Q^{(k)}$$

Enfin, en notant $T_n^+(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux réels strictement positifs, rappelons que l'application suivante est un homéomorphisme $\varphi : \begin{cases} U_n(\mathbb{C}) \times T_n^+(\mathbb{C}) & \longrightarrow GL_n(\mathbb{C}) \\ (Q, R) & \longmapsto QR \end{cases}$

L'idée de la preuve est de déterminer une expression de $Q^{(k)}$ pour avoir le comportement de $(A_k)_k$ et pour ce faire, nous allons trouver la décomposition QR de A^k d'une autre manière.

Etape 1 : Trouver la décomposition QR de A^k d'une autre manière

On a $A^k = PD^kP^{-1}$, donc en notant $P = QR$ la décomposition QR de P (qui existe par l'homéomorphisme cité précédemment) et $P^{-1} = LU$ la décomposition LU de P^{-1} , on a

$$A^k = QRD^kLU = QR(D^kLD^{-k})D^kU$$

On veut étudier le comportement de (D^kLD^{-k}) . Or sur la diagonale de L il n'y a que des coefficients 1 et par la décroissance des modules des λ_i , on a que cette suite converge vers I_n .

En effet, le calcul des coefficients donne $(D^kLD^{-k})_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i < j, \\ 1 & \text{si } i = j, \\ \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_j}\right)^k (L)_{i,j} & \text{si } i > j. \end{cases}$

Ainsi on a aussi que lorsque k tend vers l'infini, $RD^kLD^{-k}R^{-1}$ converge vers I_n . On note désormais la décomposition QR de $RD^kLD^{-k}R^{-1} = O_kT_k$. Comme O_kT_k converge vers I_n , via l'homéomorphisme φ on a que O_k et T_k convergent aussi vers I_n . On a donc :

$$A^k = (QO_k)(T_kRD^kU)$$

D'une part, Q et O_k étant unitaires, on a bien QO_k unitaire. De plus, T_kRD^kU est triangulaire supérieure mais n'est pas à diagonale réelle strictement positive à cause de D^k et U . On factorise D (resp. U) par une matrice Δ_1 (resp. Δ_2) qui contient les $e^{i\theta}$ où θ est un argument de chaque coefficient de la diagonale de D (resp. U). Ceci est bien possible car U est inversible puisque P^{-1} l'est donc aucun des coefficients diagonaux de U n'est nul et les λ_i sont supposés de modules strictement positifs.

Donc $D = \Delta_1|D|$ avec $|D| = \text{diag}(|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_n|)$ et $U = \Delta_2U'$.

Si $U = \begin{pmatrix} \rho_1 e^{i\theta_1} & & (*) \\ 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & \rho_n e^{i\theta_n} \end{pmatrix}$ alors on a $\Delta_2 = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}$ et $U' = \begin{pmatrix} \rho_1 & & (*) \\ 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & \rho_n \end{pmatrix}$.

Ainsi $|D|$ et U' sont bien triangulaires supérieures de diagonale réelle strictement positive. On a alors

$$A^k = (QO_k\Delta_1^k\Delta_2)(\Delta_2^{-1}\Delta_1^{-k}T_kR\Delta_1^k|D|^k\Delta_2U')$$

Maintenant on a bien $\Delta_2^{-1}\Delta_1^{-k}T_kR\Delta_1^k|D|^k\Delta_2U' \in T_n^+(\mathbb{C})$ et on a $QO_k\Delta_1^k\Delta_2$ unitaire.

Donc on a bien une décomposition QR de A^k .

Comme $A^k = Q^{(k)}R^{(k)}$ est aussi une décomposition QR de A^k , on a, par unicité de la décomposition QR ,

$$Q^{(k)} = QO_k\Delta_1^k\Delta_2$$

Etape 2 : Convergence de $(A_k)_k$

On a alors

$$A_{k+1} = (QO_k\Delta_1^k\Delta_2)^*A(QO_k\Delta_1^k\Delta_2) = (\Delta_1^k\Delta_2)^*O_k^*Q^*AQO_k(\Delta_1^k\Delta_2)$$

Or

$$Q^*AQ = Q^*QRDR^{-1}Q^{-1}Q = RDR^{-1}$$

en se rappelant que $P = QR$ et $A = PDP^{-1}$.

De plus, comme R est triangulaire supérieure (à diagonale constituée de 1), on a

$$RDR^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Nous avons vu que O_k tend vers I_n , donc on a

$$O_k^*Q^*AQO_k \text{ qui converge vers } \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

De plus, la conjugaison par $\Delta_1^k\Delta_2$ ne changera ni les coefficients nuls sous la diagonale ni la diagonale. Donc $(A_k)_k$ converge bien vers une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale est $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

□