

SO(3) simple !

Proposition finale :

i) Justifier que tout retournements sont conjugués entre eux :

~~Un retournement~~

Soit r_1 un retournement dans $\mathbb{R}^3$. r_1 est entièrement définie par sa droite de rotation Δ_1 (car : $r_1|_{\Delta_1} = \text{id}$ $\sim \text{Mat}_{\mathcal{B}}(r_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{\Delta_1}$ et $r_1|_{\Delta_1^\perp} = -\text{id}$)

Or : SO(3) agit transitivement sur la sphère unité, donc sur les droites de $\mathbb{R}^3$. (*)

Donc pour Δ_1, Δ_2 deux droites quelq. de $\mathbb{R}^3$, on a qu'il existe $g \in \text{SO}(3)$ tel que $g(\Delta_1) = \Delta_2$.

D'où en associant les retournements r_1 et r_2 aux droites Δ_1 et Δ_2 on a que : $g r_1 g^{-1} = r_2$.

D'où : tous les retournements sont conjugués entre eux.

$$\boxed{\text{Rq : } g(\Delta_1) = \Delta_2 \Rightarrow g r_1 g^{-1} = r_2}$$

Vient du fait que $\forall h \in \text{SO}(3), \forall g \in \text{SO}(3),$

$$g(E_{\Delta, h}) = E_{\Delta, ghg^{-1}}$$

En effet, $x \in E_{\Delta, ghg^{-1}} \Leftrightarrow ghg^{-1}(x) = \lambda x \Leftrightarrow h(g^{-1}(x)) = \lambda(g^{-1}(x))$
 $\Leftrightarrow g^{-1}(x) \in E_{\Delta, h} \Leftrightarrow x \in g(E_{\Delta, h})$

Lemme 2: $SO(3)$ agit transitivement sur S^2 .

On considère : $SO(3) \times S^2 \longrightarrow S^2$

$$(g, v) \mapsto g.v$$

Soient $u, v \in S^2$, on a donc que $\|u\|_2 = \|v\|_2 = 1$.

on complète u et v en des b.o.n directe. (on peut multiplier un vect. par -1)

D'où: le changement de base de u à v est donné par l'endomorphisme $g \in SO(3)$.

Question Jury: $SO(n)$ est simple pour $n \geq 3$?

Pour n pair, on a que $Z(SO(n)) \supseteq \{id, -id\}$. Donc on ne peut pas utiliser la démarche du Thm. qu'on a faite.
Et on obtient $Z(SO(n)) \trianglelefteq SO(n) \neq \{id\}$ et $SO(n)$. D'où c'est faux!

En effet, Pour n pair et $g \in Z(SO(n))$, on a que :

$$\forall h \in SO(n), gh = hg$$

De plus comme n est pair, on a que $\det(-I_n) = 1$.

D'où $-I_n \in Z(SO(n))$ ✓.