AGNIEL Vidal

Référence : Zavidovique

Théorème de Grothendieck

Théorème :

Soit $(\Omega ; \mathcal{F} ; \nu)$ un espace probabilisé.

Soit $1 \leq p < +\infty$, et S un s-ev de $L^p(\Omega)$ tq S fermé pour $\|.\|_{L^p}$ et $S \subset L^\infty(\Omega)$.

Alors S est de dim finie.

démo :

Etape 1 : Soit $i : \begin{array}{l}(S ; \|.\|_{L^p}) \to (S ; \|.\|_{L^\infty}) \\ f \mapsto f\end{array}$ l'injection dans L^∞. Montrons que le graphe de i est fermé :

Soit $(f_n ; i(f_n))$ qui CV vers $(f ; g) \in L^p \times L^\infty$. Comme $\nu(\Omega) = 1$, $L^\infty \subset L^p$ et on a : $\|f_n - g\|_{L^p} = \|i(f_n) - g\|_{L^p} \leq \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}} \times \|i(f_n) - g\|_{L^\infty} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Donc $f_n \xrightarrow{L^p} f$, $f_n \xrightarrow{L^p} g$ donc $g = f$, et $f \in S$ car S fermé pour $\|.\|_{L^p}$. Donc $(f ; g) = (f ; i(f))$, ce qui conclut.

~~Donc~~ Cela montre de plus que S est fermé pour $\|.\|_{L^\infty}$.

Donc $(S ; \|.\|_{L^p})$ et $(S ; \|.\|_{L^\infty})$ sont des Banach. Comme i est lin cont, on a $M > 0$ tq $\forall f \in S$, $\|f\|_{L^\infty} \leq M \|f\|_{L^p}$

Etape 2 : On se ramène à $L^2(\Omega)$: $\exists \tilde{M} > 0$ tq $\forall f \in S$, $\|f\|_{L^\infty} \leq \tilde{M} \|f\|_{L^2}$

Si $p = 2$, on a $\|f\|_{L^\infty} \leq M \|f\|_{L^2}$

Si $1 \leq p < 2$, on a : $\|f\|_{L^p}^p = \int |f|^p d\nu \leq \left(\int (|f|^p)^{\frac{2}{p}} d\nu\right)^{\frac{p}{2}} \times \left(\int d\nu\right)^{\frac{p}{2-p}} = \|f\|_{L^2}^p$ par Holder

Donc $\|f\|_{L^\infty} \leq M \|f\|_{L^p} \leq M \|f\|_{L^2}$

Si $2 < p < +\infty$, on a : $\|f\|_{L^p}^p = \int |f|^p d\nu \leq \|f\|_{L^\infty}^{p-2} \times \|f\|_{L^2}^2$

$\Rightarrow \|f\|_{L^\infty}^p \leq M^p \|f\|_{L^\infty}^{p-2} \|f\|_{L^2}^2 \Rightarrow \|f\|_{L^\infty} \leq M^{\frac{p}{2}} \|f\|_{L^2}$

Etape 3 :

Soit $(f_1, \dots, f_n)$ famille orthonormée de $S \subset L^2(\Omega)$. Montrons que $\exists \alpha > 0$ tq $n < \alpha$.

$\forall c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{Q}^n$, $\exists N_c \subset \Omega$, $\nu(N_c) = 0$ tq $\forall x \in \Omega \setminus N_c$, $|c_1 f_1(x) + \dots + c_n f_n(x)| \leq \|c_1 f_1 + \dots + c_n f_n\|_{L^\infty}$

Posons $\tilde{\Omega} = \Omega \setminus \left(\bigcup_{c \in \mathbb{Q}^n} N_c\right)$. On a $\nu(\tilde{\Omega}) = 1$.

$\forall x \in \tilde{\Omega}$, $\forall c \in \mathbb{Q}^n$, on a $|c_1 f_1(x) + \dots + c_n f_n(x)| \leq \|c_1 f_1 + \dots + c_n f_n\|_{L^\infty}$.

Comme les deux termes sont continus en les c_i, on étend le résultat à tout $c \in \mathbb{R}^n$ car $\mathbb{Q}^n$ est dense dans $\mathbb{R}^n$.

Soit $x \in \tilde{\Omega}$. On pose $c_i = \overline{f_i(x)}$. On a alors $|c_1 f_1(x) + \dots + c_n f_n(x)| = \sum_{i=1}^n |f_i(x)|^2 \leq \|\sum c_i f_i\|_{L^\infty} \leq \tilde{M} \|\sum c_i f_i\|_{L^2} = \tilde{M} \times \sqrt{\sum |c_i|^2} = \tilde{M} \times \sqrt{\sum |f_i(x)|^2}$

Donc $\sum_{i=1}^{n} |f_i(x)|^2 \leqslant \tilde{M}^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} |f_i(x)|^2 \, d\nu(x) \leqslant 1 \times \tilde{M}^2$

$$\begin{gathered} \| \\ \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} |f_i(x)|^2 \, d\nu(x) = \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L^2(\Omega)}^2 = n \end{gathered}$$

Ainsi, les familles orthogonales de S sont de cardinal borné, donc S est de dim finie $\leqslant \tilde{M}^2$. $\square$